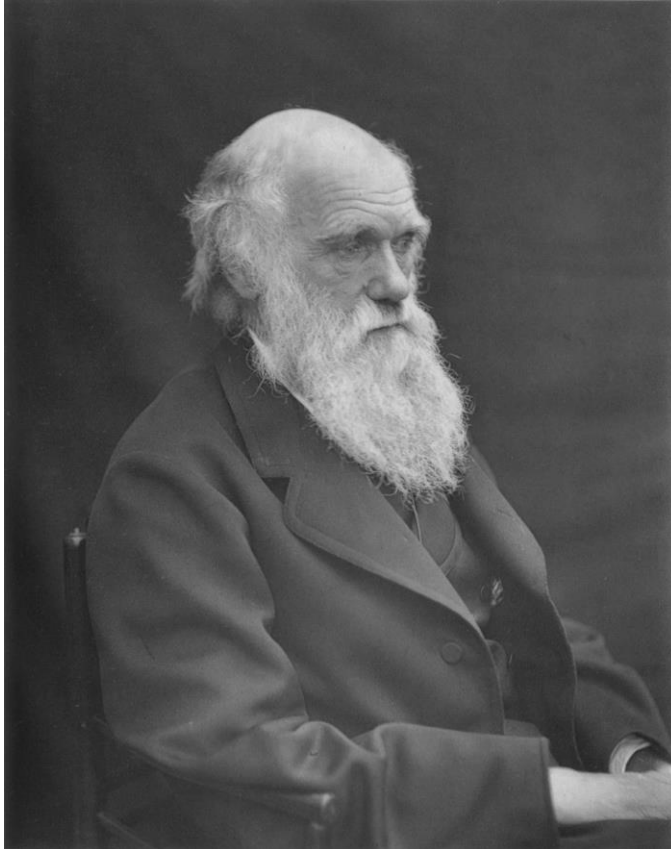


שיטות ניטור



“It is not the strongest of the species that survives, nor the most intelligent that survives.

It is the one that is most adaptable to change.”

Charles Darwin (1809 – 1882)

... לא לגבורים המלחמה
... וגם לא לנבונים עושר
... כי-עת ופגע, יקרה את-כלם.
קהלת ט יא

פרופ' משה פולק

מס"ל 24/7/2019 בלמ"ס

תוכן ההרצאה

ת
|
א
מ
ג
|
ד

- מבוא אינטואיטיבי
- הדגמת בעיית הניטור
- הגדרות בסיסיות
- תרשים בקרה
- הקשר לבדיקת השערות
- קריטריונים
- הרעיון המתודולוגי
- מצבים פחות בסיסיים

מבוא

I was going to quit all my bad habits, but then it occurred to me –
No one likes a quitter

We love routine !



This Photo by Unknown Author is licensed under [CC BY-SA-NC](#)

• אנחנו יצורים של הרגל

• כשהשגרה נפסקת, אנחנו רוצים לדעת זאת

• (יש התחממות של כדור הארץ? יש עלייה בשכיחות של ילדים הנולדים עם אוטיזם? עלייה בעמידות אימפיטגו לאנטיביוטיקה? האם גדלה התנודתיות של מדדי המניות בבורסה?)



• לרוב, אין אנו אדישים לשינוי

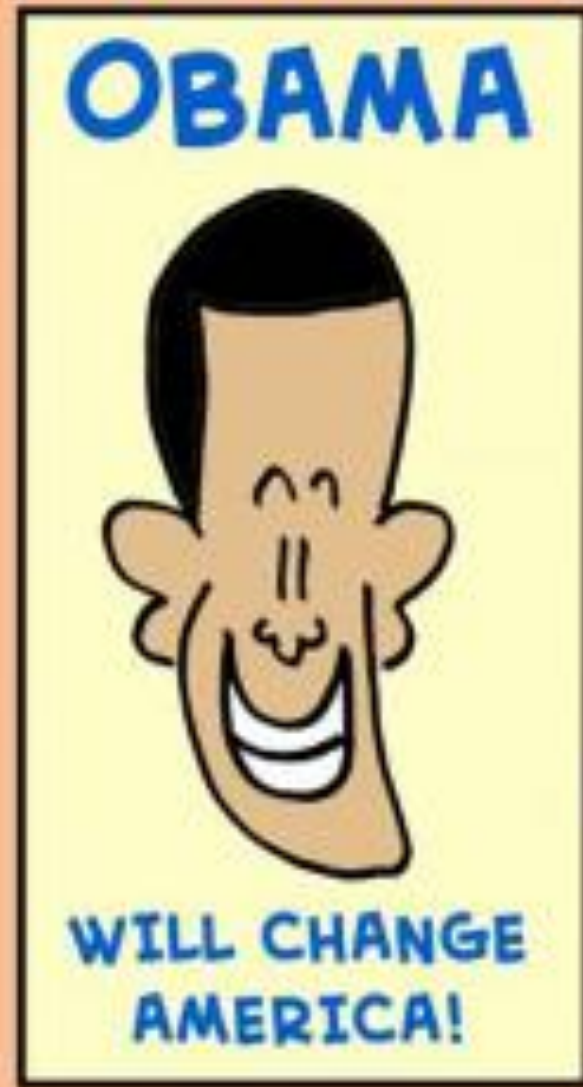
From: Theft! A History of Music by James Boyle and Brian Garvey

שינוי

”שינוי הוא בלתי נמנע. שינוי הוא קשה. שינוי הוא טוב. נדיר ששינוי מזוהה בזמן. שינוי הוא מהות החיים. כך עלינו לתפוש את אשר קורה ... לא בהכרח כאסון, כקונספירציה, כטרגדיה, כהפתעה, אלא כשינוי הבלתי נמנע שלא זוהה ולא נוצל מספיק מוקדם.”

- ג'ף ג'רוויס





LET'S HOPE
WE'RE IN
THE CONTROL
GROUP



Belu

מבוא - המשך

- לעתים קרובות אין מי שיספר לנו שהמצב השתנה, ולא נותר לנו אלא לסמוך על סדרה של תצפיות (רועשות!) כדי להבחין בשינוי.
- באופן אינטואיטיבי, אם "לאחרונה" נראות התצפיות "לא סטנדרטיות", תהיה לנו נטייה להכריז שארע שינוי.
- כרגיל, הבעיה היא בפרטים: מהו "לאחרונה"? ומהו "לא סטנדרטי"?
- חוץ מזה, אם נהיה מהירים ללחוץ על ההדק, יהיו הרבה אזעקות שווא; אם נהסס, העיכוב בגילוי השינוי עלול לעלות ביוקר. מהי שיטת גילוי טובה? מה תוחלת הזמן המינימלי בין שינוי לגילוי תחת מגבלה על אזעקות שווא?

דוגמה:

זרימת המים השנתית בנהר הנילוס

- 1871 1120
- 1872 1160
- 1873 963
- 1874 1210
- 1875 1160
- 1876 1160
- 1877 813
- 1878 1230
- 1879 1370
- 1880 1140
- 1881 995
- 1882 935
- 1883 1110
- 1884 994
- 1885 1020
- 1886 960
- 1887 1180
- 1888 799
- 1889 958
- 1890 1140



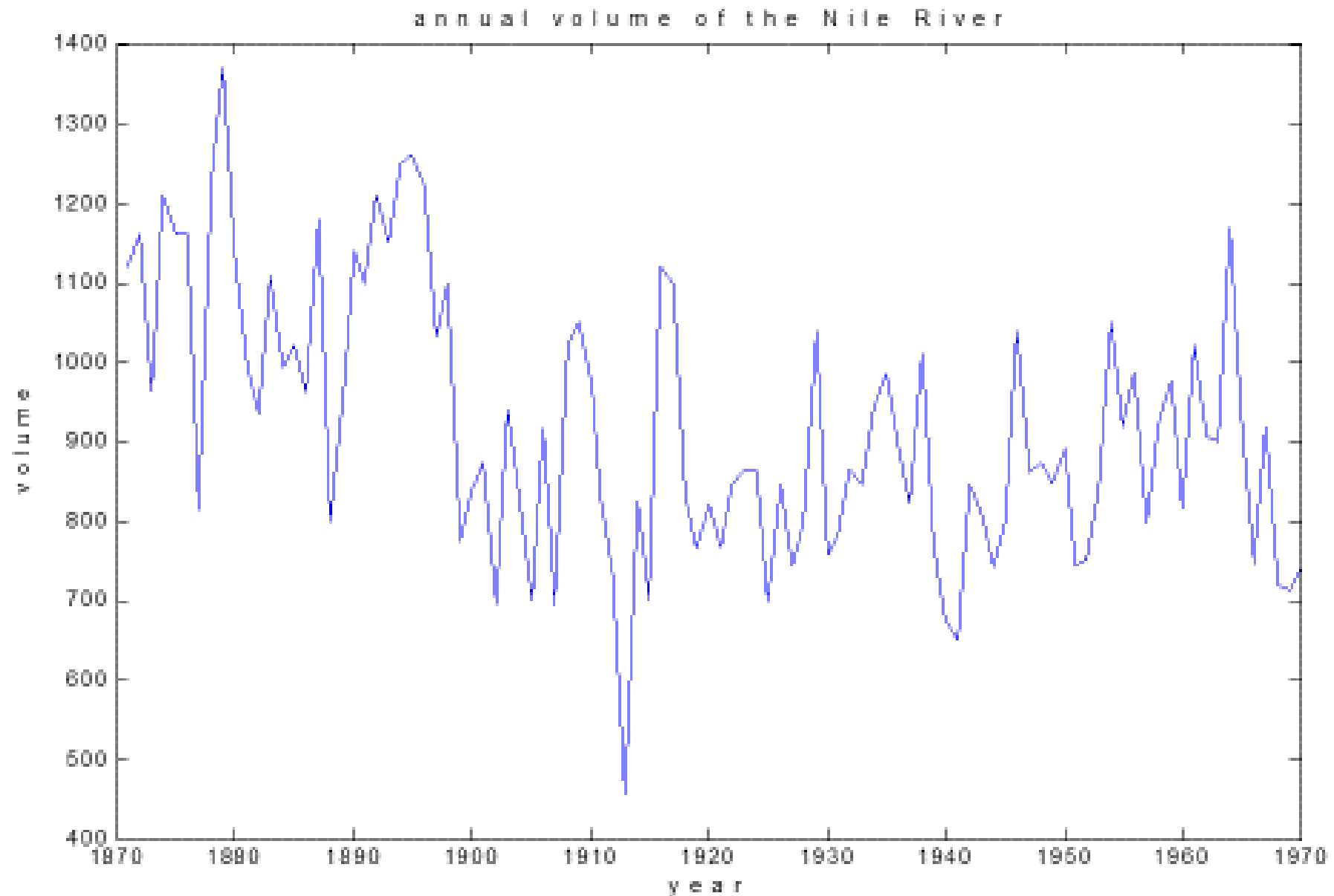
- 1891 1100
- 1892 1210
- 1893 1150
- 1894 1250
- 1895 1260
- 1896 1220
- 1897 1030
- 1898 1100
- 1899 774
- 1900 840
- 1901 874
- 1902 694
- 1903 940
- 1904 833
- 1905 701



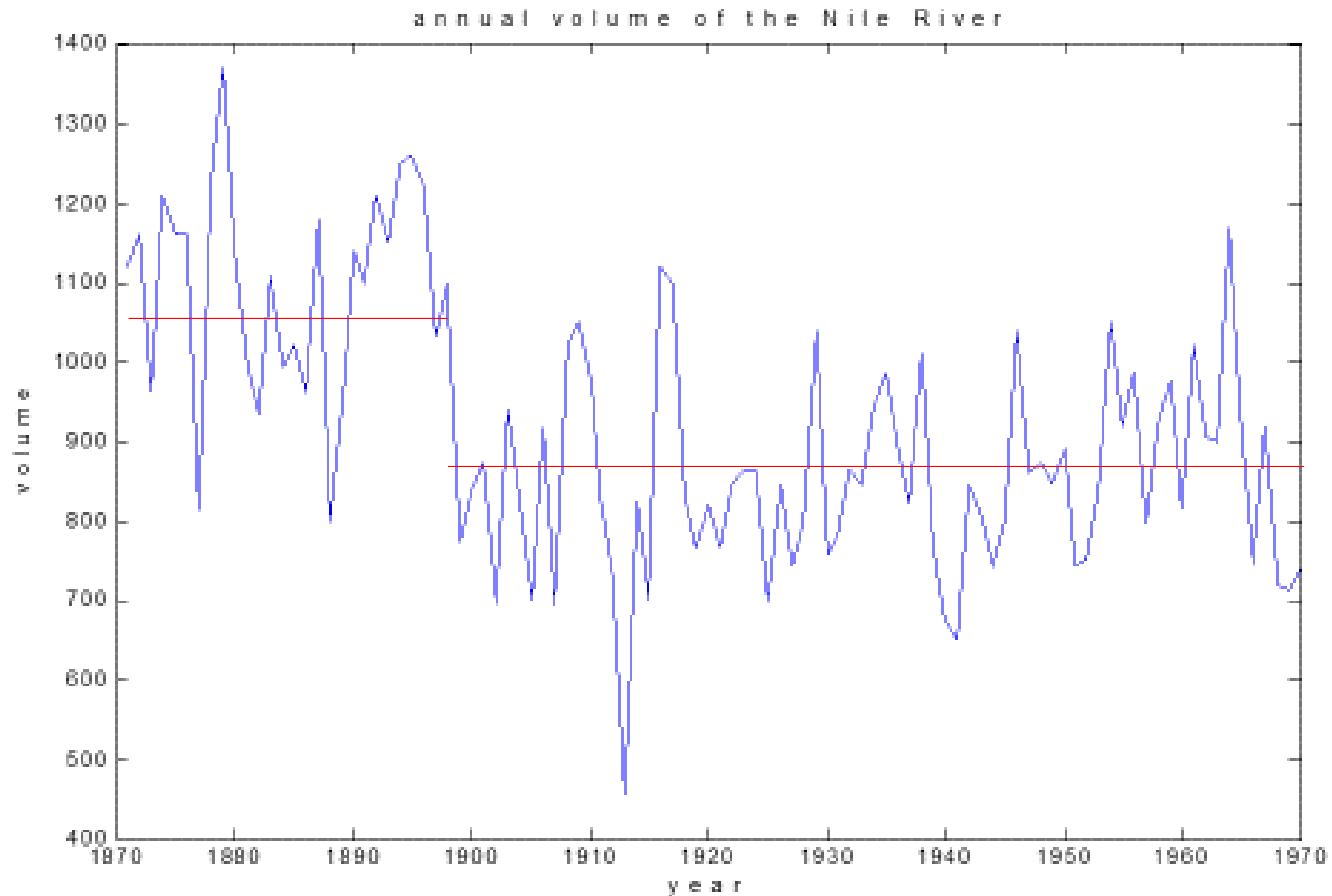
Table 1. Annual volume of the Nile River (discharge at Aswan, 10^6 m³) from 1871 to 1970, with apparent changepoint near 1888

Year	Vol.	Year	Vol.	Year	Vol.	Year	Vol.	Year	Vol.
1871	1120	1891	1100	1911	831	1931	781	1951	744
1872	1180	1892	1210	1912	726	1932	865	1952	749
1873	983	1893	1160	1913	456	1933	845	1953	838
1874	1210	1894	1250	1914	824	1934	944	1954	1060
1875	1180	1895	1260	1915	702	1935	984	1955	918
1876	1180	1896	1220	1916	1120	1936	897	1956	986
1877	813	1897	1030	1917	1100	1937	822	1957	797
1878	1230	1898	1100	1918	832	1938	1010	1958	923
1879	1370	1899	774	1919	764	1939	771	1959	975
1880	1140	1900	840	1920	821	1940	676	1960	815
1881	996	1901	874	1921	763	1941	649	1961	1020
1882	936	1902	694	1922	845	1942	846	1962	906
1883	1110	1903	940	1923	804	1943	812	1963	901
1884	994	1904	833	1924	862	1944	742	1964	1170
1885	1020	1905	701	1925	698	1945	801	1965	912
1886	969	1906	916	1926	845	1946	1040	1966	748
1887	1130	1907	692	1927	744	1947	880	1967	919
1888	799	1908	1020	1928	796	1948	874	1968	718
1889	938	1909	1060	1929	1040	1949	848	1969	714
1890	1140	1910	969	1930	759	1950	890	1970	740

זרימת המים השנתית בנהר הנילוס

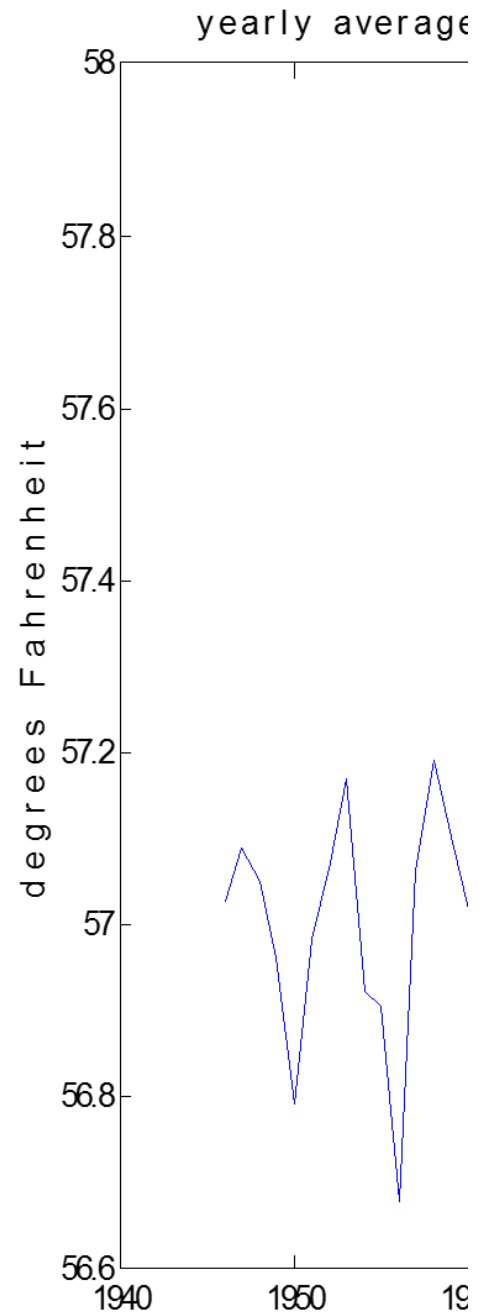


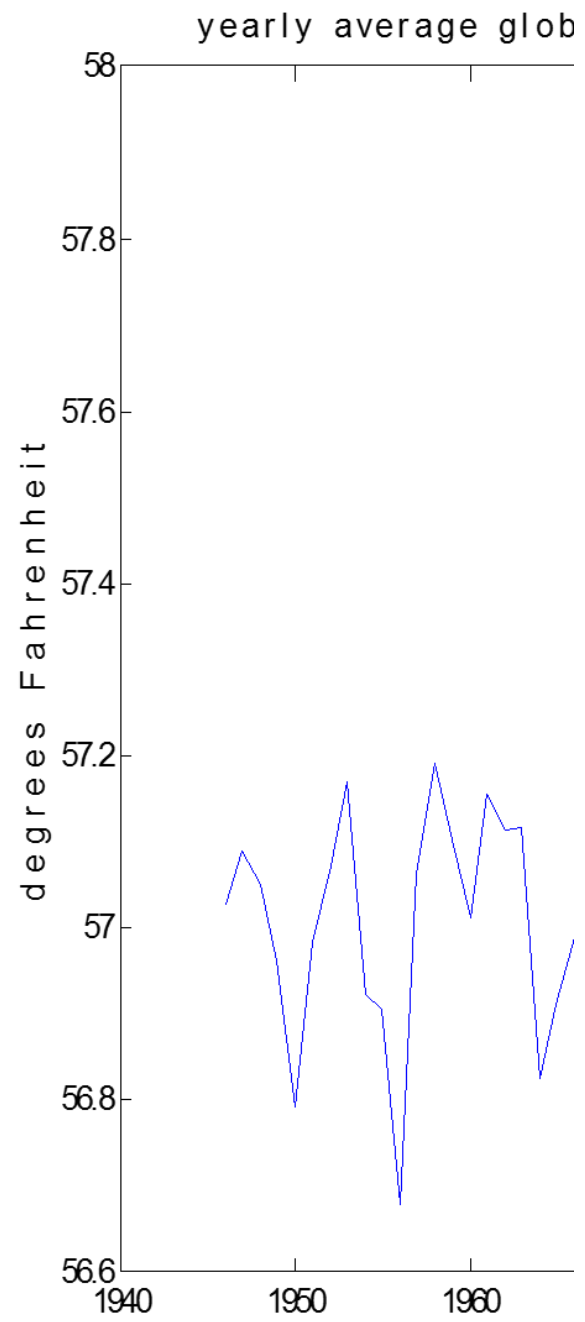
זרימת המים השנתית בנהר הנילוס

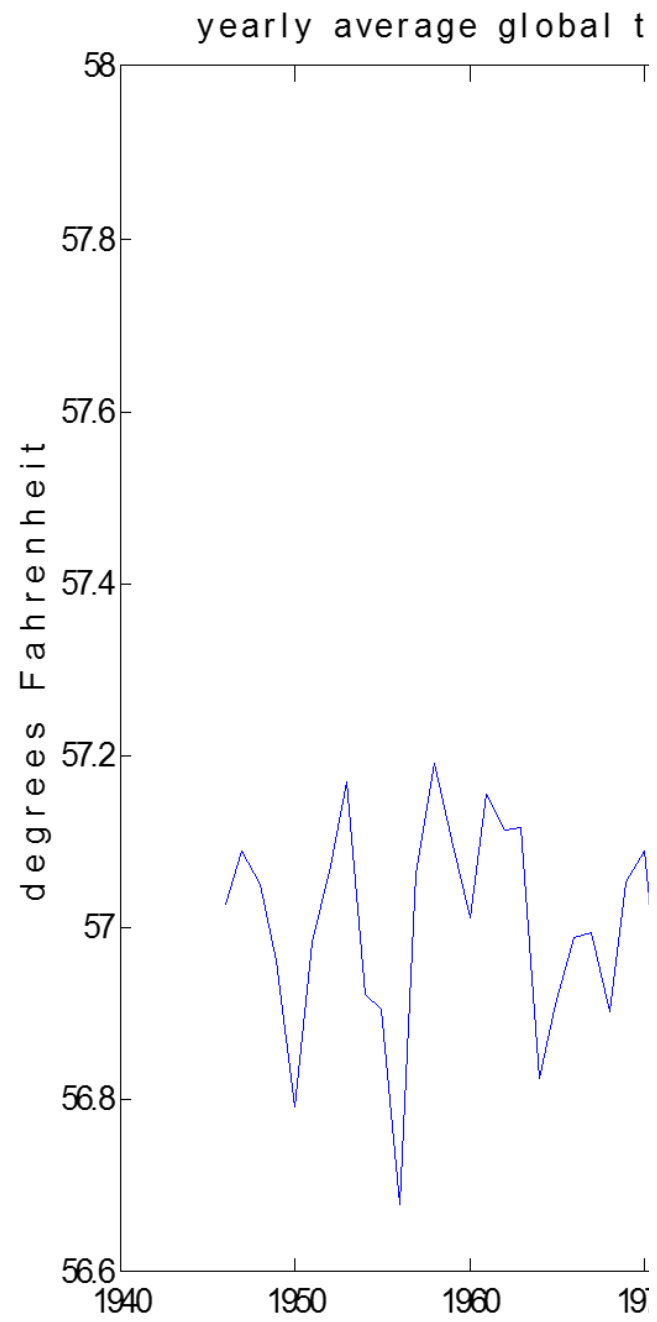


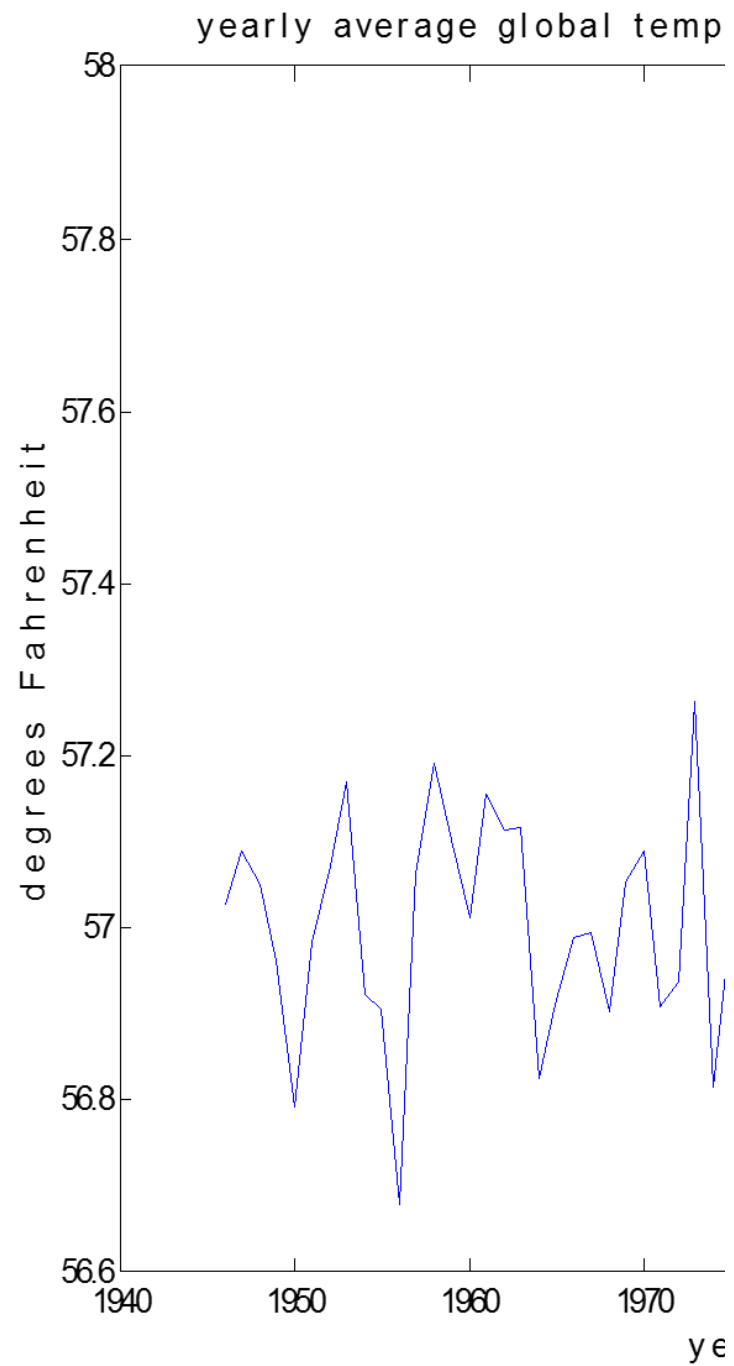
טמפרטורות עולמיות ממוצעות מאז מלחמת העולם השנייה

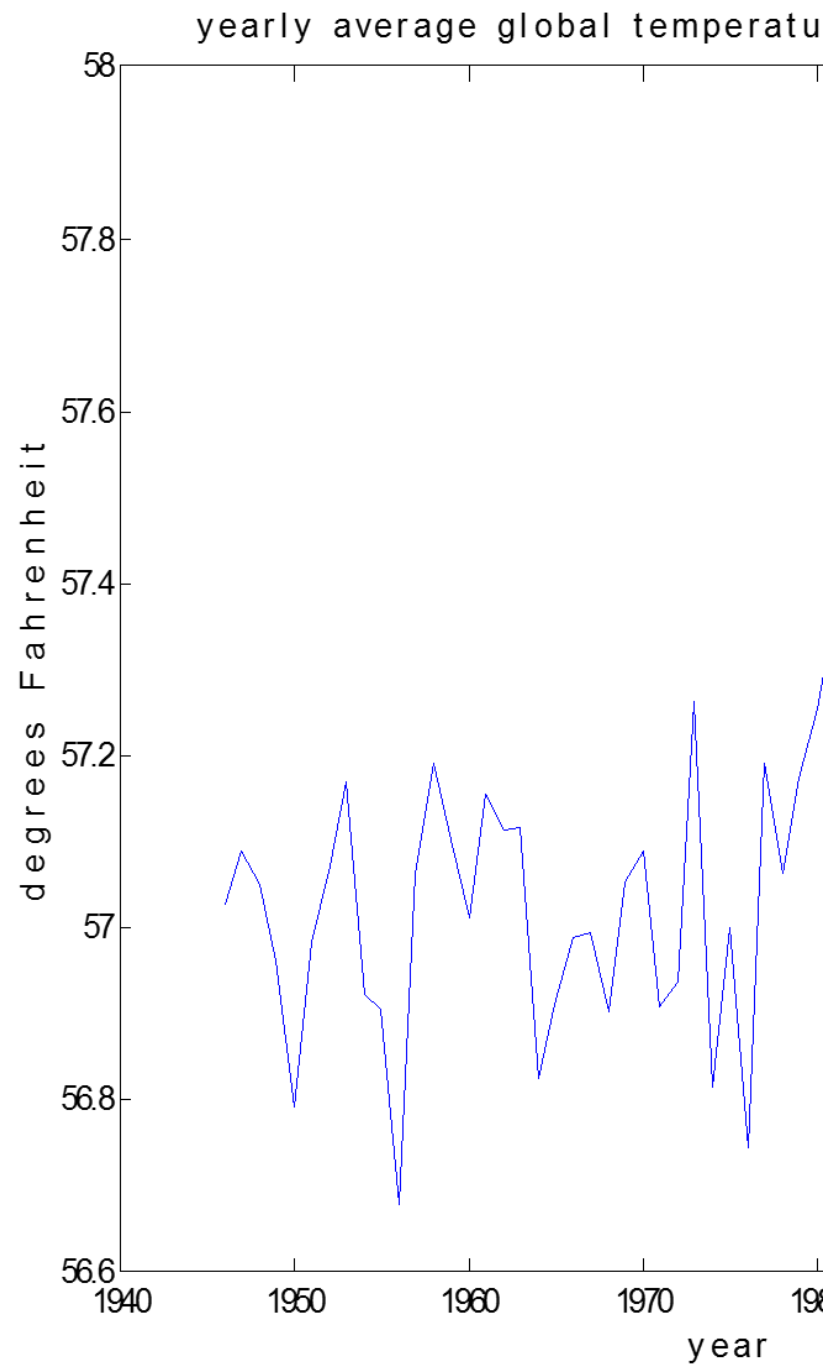
טמפרטורות עולמיות ממוצעות מאז מלחמת העולם השנייה

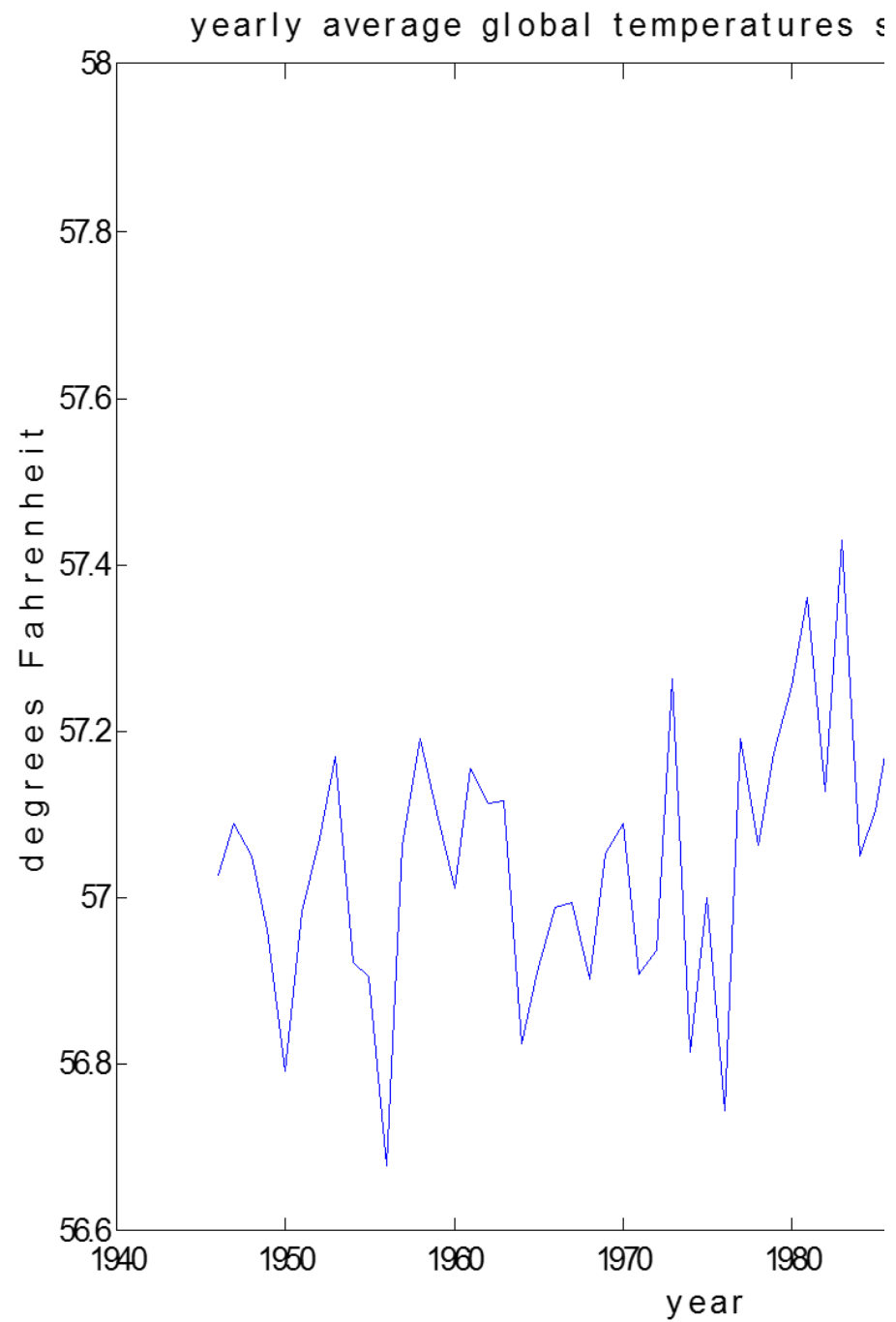


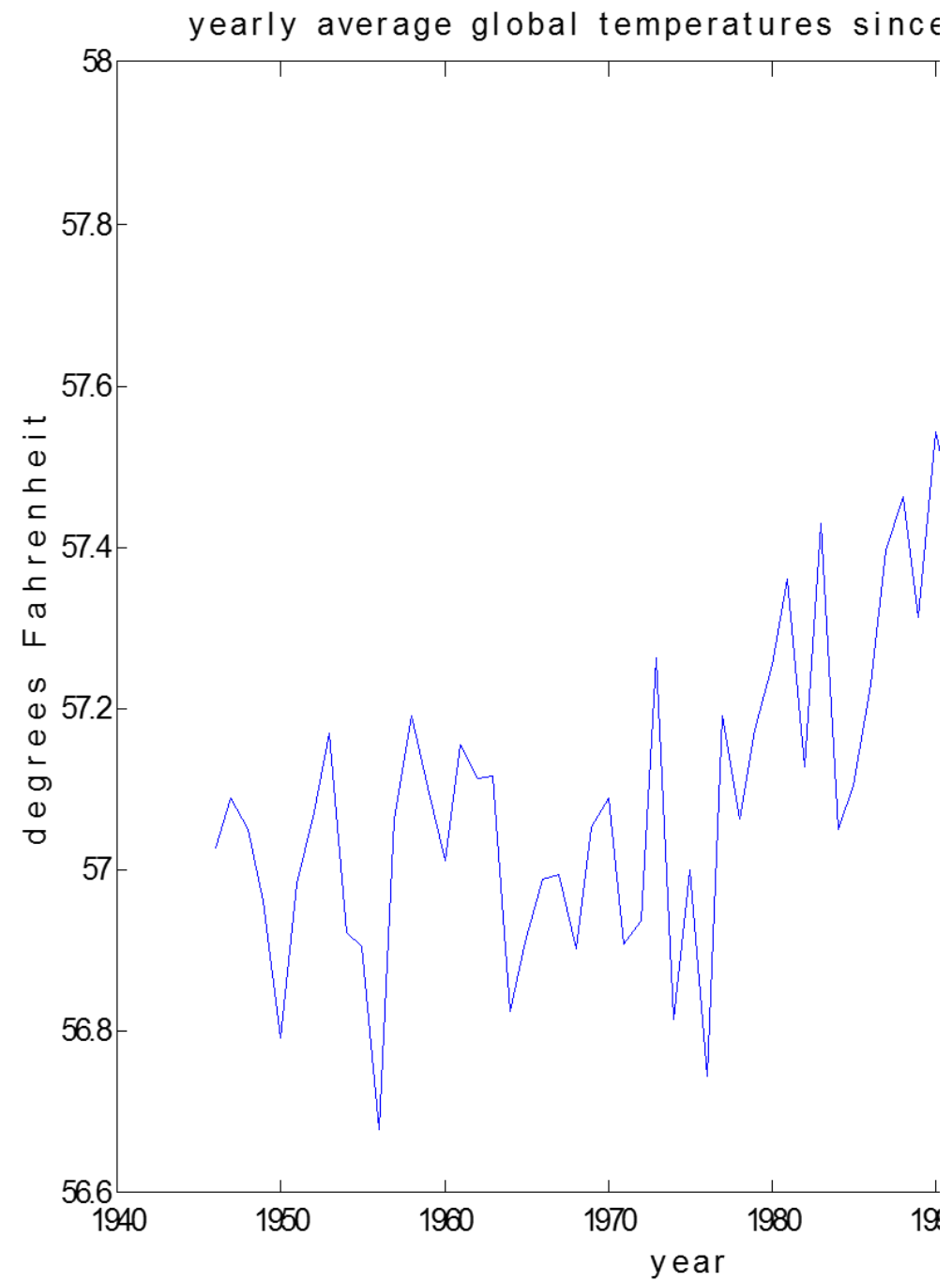




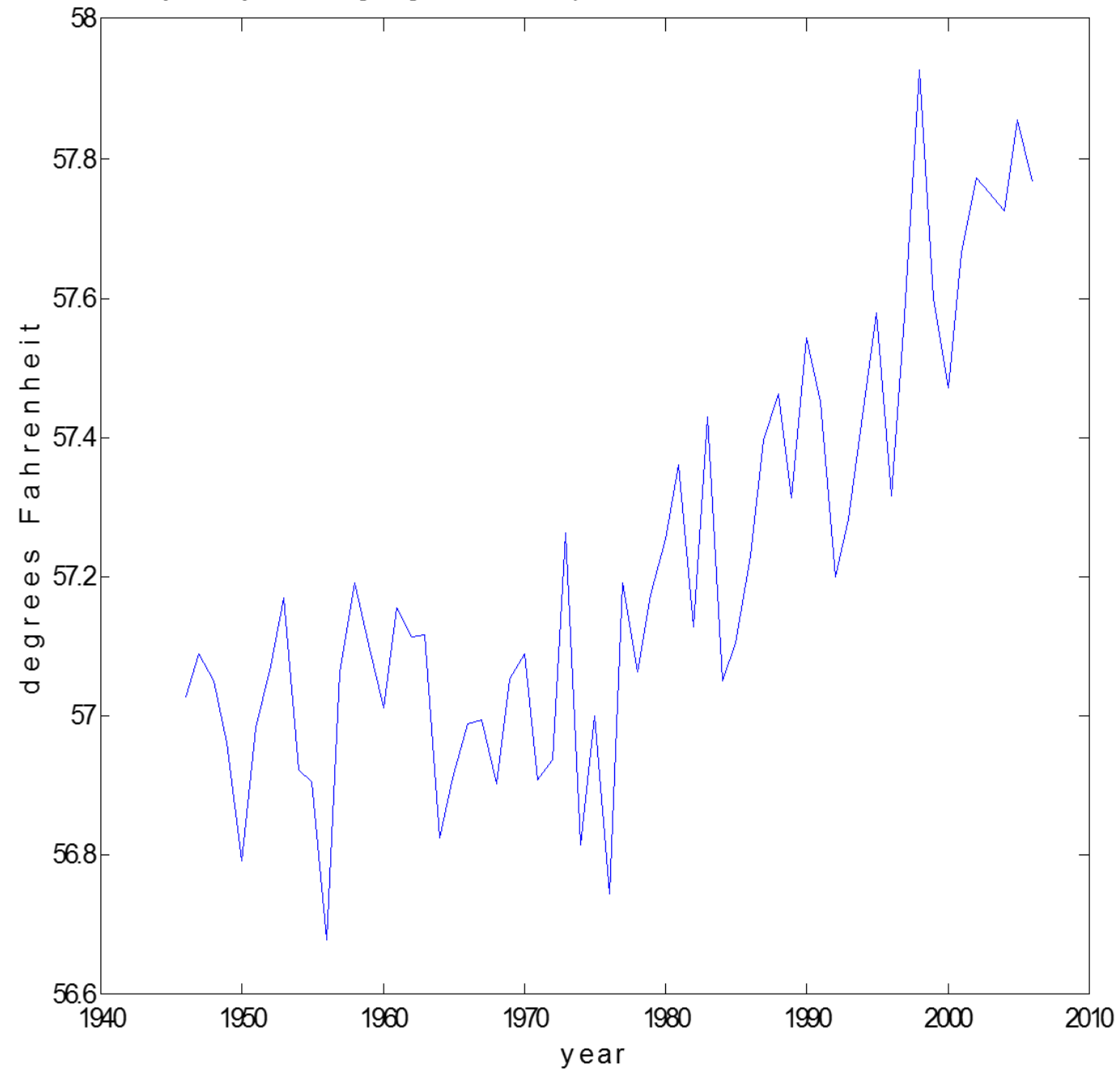








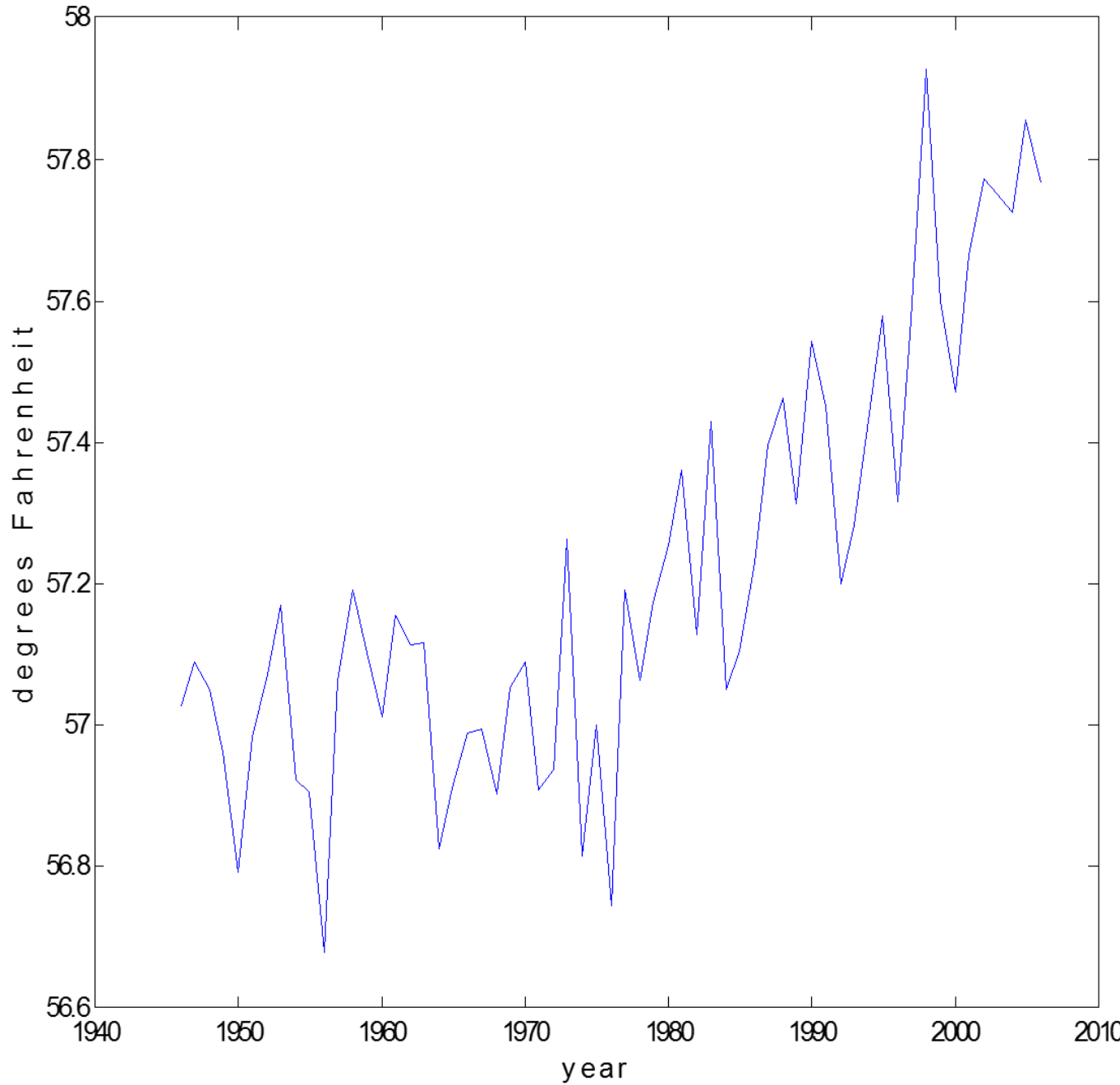
yearly average global temperatures since World War II



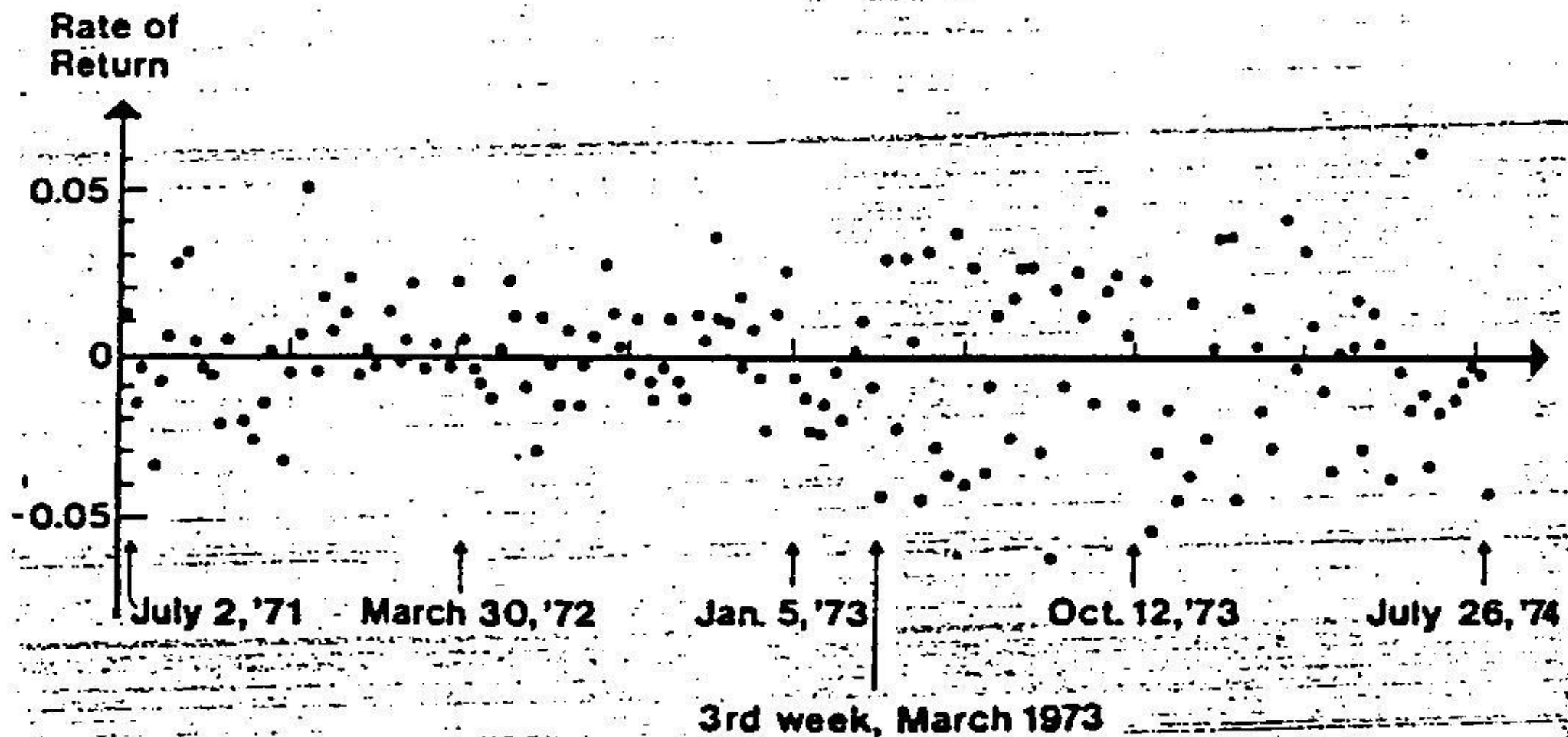


"Which one are we melting after we're done with glaciers?"

yearly average global temperatures since World War II



A. Weekly Rates of Return Computed Based on Values of the Dow-Jones Industrial Average



לסיכום



RAMA

- לחיצה מהירה על ההדק תיצור אזעקות שווא
- שמרנות יתר תגרום לאיחור בגילוי שינוי אמיתי

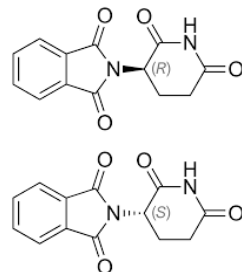
Time is
Too slow for those who Wait,
Too swift for those who Fear,
Too long for those who Grieve,
Too short for those who Rejoice,
But for those who Love,
Time is not.

Henry van Dyke Jr.



- מסקנה: יש לאזן בין השניים

Thalidomide



William McBride

Frances Kelsey •



“ For he who gets hurt will be he who has stalled ”

“ For he who gets hurt will be he who has stalled ”

” זה שהתמהמה הוא זה שייפגע ”

“ For he who gets hurt will be he who has stalled ”

” זה שהתמהמה הוא זה שייפגע ”

– Bob Dylan

For the times they are a-changin'

Bob Dylan 1964

Come senators, congressmen
Please heed the call

Don't stand in the doorway

Don't block up the hall

For he that gets hurt

Will be he who has
stalled

There's a battle outside

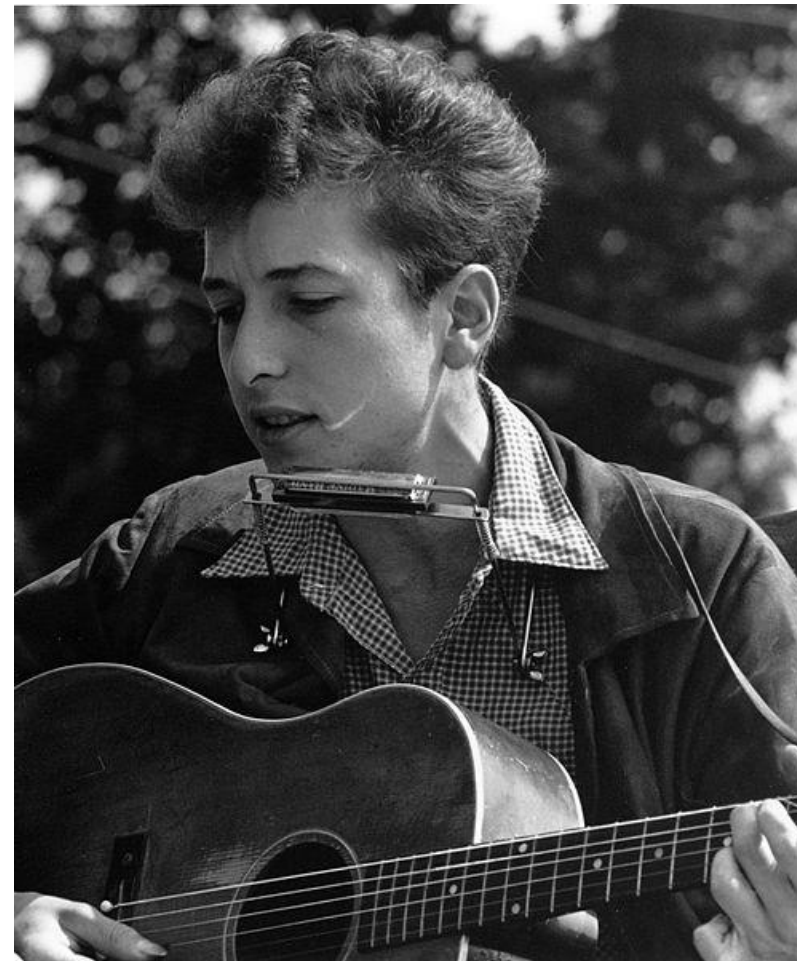
And it is ragin'.

It'll soon shake your windows

And rattle your walls

For the times

they are a-changin'.



אז מה הבעיה?

- אם לחצנו על ההדק, ניטור בעין בלתי מזויינת לא תמיד נותן לנו ביטחון שלא לחצנו מהר מדי
- אם לא לחצנו על ההדק, ניטור בעין בלתי מזויינת יכול להשאיר בלבנו ספק אם אנחנו לא התמהמהנו יתר על המידה
- מה שחסר הוא פרוטוקול פורמלי שיאמר לנו מתי ללחוץ על ההדק, פרוטוקול שינמיד את חששותנו

למעשה, אנחנו מחפשים כלל עצירה, בו נכריז שארע שינוי

בהינתן סדרת תצפיות X_1, X_2, X_3, \dots ,
כלל עצירה T הוא משתנה מקרי
שערכיו מספרים טבעיים

שמשמעותו סימון לעצור אחרי T תצפיות
ולחריז שארע שינוי. כלומר:

כשעצרנו צפינו ב- $X_1, X_2, X_3, \dots, X_T$.

הכלל T מבוסס על כל התצפיות
מהעבר עד ההווה (עד בכלל),
ואינו מבוסס על העתיד.



לא מספיק כלל עצירה. צריך כלל עצירה טוב !

• מה זה טוב?

• טוב – הוא כלל עצירה שאם ארע שינוי אמיתי הוא יתגלה מהר,
ואם לא ארע שינוי המנגנון ימעיט באזעקות שווא

• לצורך זה יש להגדיר קריטריונים שיאפיינו כלל עצירה:

• אחד שיהיה ביטוי כמותי לנטייה של כלל העצירה להביא לידי
אזעקת שווא

• ואחד שיהיה ביטוי כמותי למהירות בה מתגלה שינוי אמיתי

Walter Shewhart (1924, 1931)

ECONOMIC CONTROL OF QUALITY OF MANUFACTURED PRODUCT

- שוהרט הבין שבתהליך ייצור אין קביעות מתמטית, אלא יש שוני בין מוצרים, גם אם נוצרו באותו פס ייצור, וזה בסדר.

- הוא טען שיש להתייחס לתהליך ייצור כמשביע רצון אם בדרך כלל המאפיינים של המוצרים נמצאים בתוך גבולות סבירים:

" נאמר שתופעה נמצאת בשליטה (in control) כאשר, באמצעות העבר, ניתן לחזות, לפחות בתוך גבולות, כיצד התופעה צפויה להיות שונה בעתיד. הכוונה של תחזית בתוך גבולות היא שניתן לקבוע, לפחות בקירוב, את ההסתברות שהתופעה תימצא בתוך גבולות נתונים מראש..."

(Shewhart, 1931:6)

תרשים הבקרה של שוהרט (Shewhart control chart)

• הנחה: מדידות בלתי תלויות של מוצרים, X_1, X_2, X_3, \dots

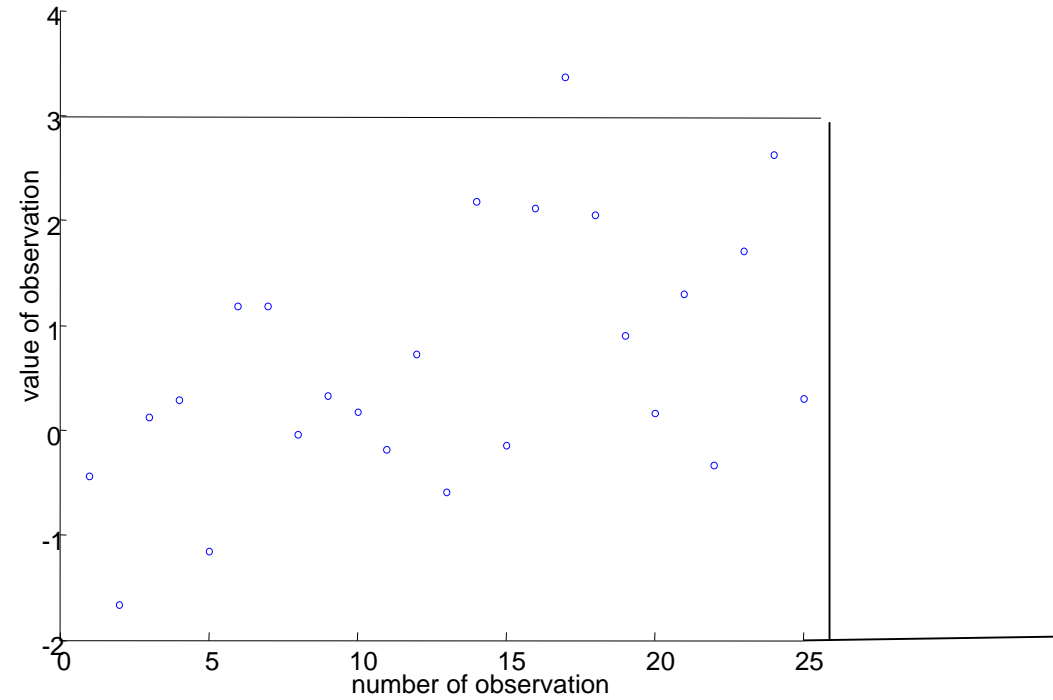
• כל עוד התהליך בבקרה (in control) למדידות יש תוחלת קבועה (ידועה) μ
וסטיית תקן ידועה σ

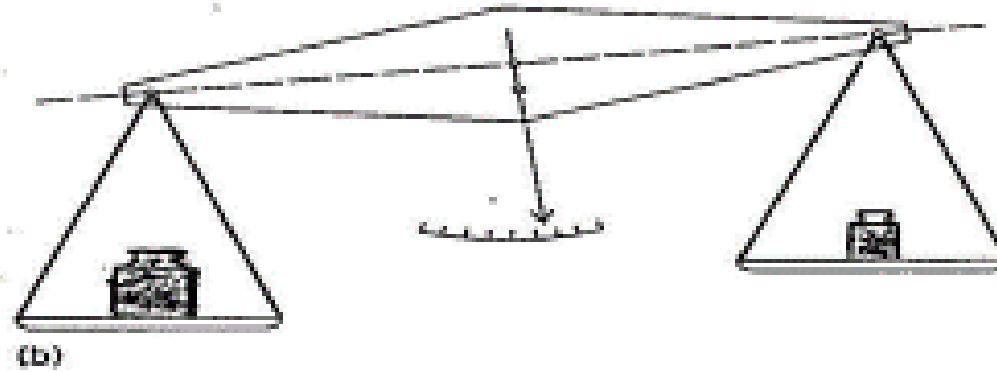
• אם מדידה סוטה מ- μ ביותר מ-3 סטיות תקן, יש להכריז שארע שינוי

• כלל העצירה של שוהרט: $T = \min\{ n \mid |X_n - \mu| \geq 3\sigma \}$

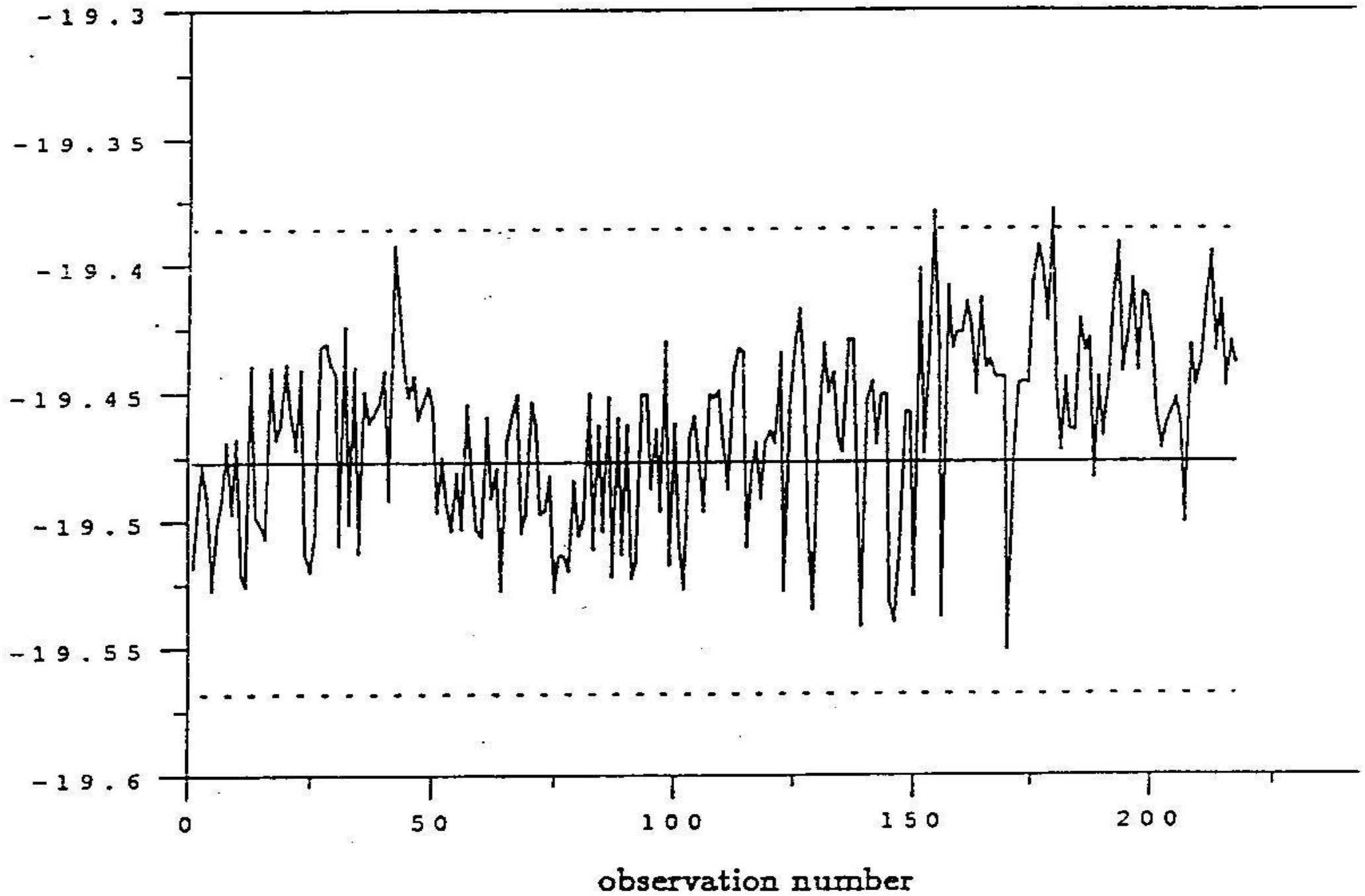
Shewhart

raises an alarm if the present observation is too extreme





	NIST	NIST	CLIENT	CLIENT	
				500	
				+	
	1000	1000	1000	300	
				+	
				200	
$y_1 =$	+	-			+ ϵ_1
$y_2 =$	+		-		+ ϵ_2
$y_3 =$	+			-	+ ϵ_3
$y_4 =$		+	-		+ ϵ_4
$y_5 =$		+		-	+ ϵ_5
$y_6 =$			+	-	+ ϵ_6



הקשר לבדיקת השערות

• לכאורה, היה ניתן להתייחס לבעיה כבדיקת השערות:

לעולם אין שינוי: H_0

יש שינוי באיזשהו זמן k , $1 \leq k < \infty$: H_1

• הקושי נובע מזה שלמעשה צריך אחרי כל תצפית להחליט אם לדחות את H_0 ,

דבר שמקשה על חישוב רמת המובהקות $P_{H_0}\{T < \infty\}$

• למעשה, בתרשים של שוהרט $P_{H_0}\{T < \infty\} = 1$; כלומר אם לעולם לא יהיה

שינוי, בוודאות תהיה מתישהו אזעקת שווא.

• למרות חוסר הנחת מ- $P_{H_0}\{T < \infty\} = 1$, נהוג לחיות עם זה.

קריטריונים

- ביטוי כמותי לאפשרות של כלל עצירה להזעיק אזעקת שווא
- ביטוי כמותי למהירות הגילוי של שינוי אמיתי

קריטריון לאזעקת שווא

Average Run Length (ARL) to false alarm = $E_{H_0}T$ •

• אם התצפיות בלתי תלויות ומפולגות נורמלית:

• שוהרט: אם לעולם אין שינוי, ההתפלגות של T היא גיאומטרית עם $p = .0026998$

$$E_{H_0}T = \frac{1}{.0026998} = 370.4 \quad \text{כך ש-}$$

סימונים

- $v =$ המספר הסידורי של התצפית הראשונה לאחר שינוי

- המשמעות של $v = \infty$ היא שאף פעם לא ארע שינוי

מאפיין של גילוי

$$E_v \{T - (v - 1) \mid T \geq v\}$$

$$\sup_{1 \leq v < \infty} E_v \{T - (v - 1) \mid T \geq v\}$$

- ההתפלגות של $\{T - (v - 1) \mid T \geq v\}$ גיאומטרית, ללא תלות ב- v .
- אם התצפיות מפולגות נורמלית, ולאחר שינוי התוחלת היא $\mu + g\sigma$ אז

שינוי בתוחלת $g =$	0	.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
זמן ממוצע עד לגילוי	370.4	155.2	43.9	15.0	6.3	3.2	2.0	1.45	1.19	1.07	1.023	1.006	1.0014

החסרונות של תרשים הבקרה של שוהרט

- מתקשה לגלות שינויים קטנים
- לא מאפשר למידע להצטבר
- תלוי בדיוק האמידה של הפרמטרים
- גם אם יש תצפית קיצונית, הטבע האנושי עלול להתפתות לחשוב שהיא חד-פעמית

גישה בעקבות בדיקת השערות

• נסמן את ההסתברות לפני שינוי של תוצאה x באות $P_0(x)$

• למשל: אם מדובר במום נדיר אצל ילודים, והשכיחות הסטנדרטית היא 1 ל-1000, אז

$$P_0(\text{חולה})_{\text{מודל}} = .001 \quad P_0(\text{בריא})_{\text{מודל}} = .999$$

• אם נרצה ניטור כנגד עלייה בהסתברות לחולי, ואם, למשל, הכפלה פי שניים בהסתברות זו נחשבת משמעותית, נוכל לכתוב הסתברויות לאחר שינוי

$$P_1(\text{חולה})_{\text{מודל}} = .002 \quad P_1(\text{בריא})_{\text{מודל}} = .998$$

הסתברויות

• כך, אם אין שינוי,

$$P_{v=\infty}(\text{חולה, בריא, בריא, בריא, חולה}) = .999 \times .001 \times .999 \times .999 \times .001$$

• כמו כן, אם חל שינוי מיד בהתחלת הניטור

$$P_{v=1}(\text{חולה, בריא, בריא, בריא, חולה}) = .998 \times .002 \times .998 \times .998 \times .002$$

• כמו כן, אם חל שינוי אחרי שצפינו, למשל, בשתי תצפיות

$$P_{v=3}(\text{חולה, בריא, בריא, חולה, בריא}) = .999 \times .001 \times .998 \times .998 \times .002$$

גישה בעקבות בדיקת השערות

- אם עלינו להחליט בין מודל 0 למודל 1 על סמך סדרה של תצפיות, בודקים את היחס בין ההסתברויות:

P_1 (הסדרה) מודל 1

P_0 (הסדרה) מודל 0

- ככל שיחס זה גדול יותר, נחשב הדבר כעדות חזקה יותר לטובת היות המציאות מודל 1

גישה בעקבות בדיקת השערות

- אם עלינו להחליט בין מודל 0 למודל 1 על סמך סדרה של תצפיות, בודקים את היחס בין ההסתברויות:

$$\frac{P_1 \text{ (הסדרה) מודל 1}}{P_0 \text{ (הסדרה) מודל 0}} = \text{יחס הנראות}$$

- ככל שיחס זה גדול יותר, נחשב הדבר כעדות חזקה יותר לטובת היות המציאות מודל 1

יחסי הנראות בבעיות ניטור

$$\Lambda_{\nu=k}^n = \frac{P_{\nu=k}(\text{observations})}{P_{\nu=\infty}(\text{observations})}$$

• למשל:

$$\Lambda_{\nu=3}^{n=5} = \frac{P_{3=\nu}(\text{חולה, בריא, בריא, חולה, בריא}) \cdot .999 \times .001 \times .998 \times .998 \times .002}{P_{\nu=\infty}(\text{חולה, בריא, בריא, בריא, חולה}) \cdot .999 \times .001 \times .999 \times .999 \times .001} = 1.998$$

מה ההבדל בין יחסי הנראות?

$$\Lambda_{\nu=3}^{n=5} = \frac{P_{\nu=3}(\text{בריא, חולה, בריא, בריא, חולה}) \cdot .999 \times .001 \times .998 \times .998 \times .002}{P_{\nu=\infty}(\text{בריא, חולה, בריא, בריא, חולה}) \cdot .999 \times .001 \times .999 \times .999 \times .001} = 1.998$$

$$\Lambda_{\nu=2}^{n=5} = \frac{P_{\nu=2}(\text{בריא, חולה, בריא, בריא, חולה}) \cdot .999 \times .002 \times .998 \times .998 \times .002}{P_{\nu=\infty}(\text{בריא, חולה, בריא, בריא, חולה}) \cdot .999 \times .001 \times .999 \times .999 \times .001} = 3.996$$

אז מה לעשות עם יחסי הנראות?

• שיטת CUSUM :

לבחור את הגדול מבין כולם. להכריז שארע שינוי כשביטוי זה עובר סף שנקבע מראש.

• שיטת SHIRYAEV-ROBERTS :

לסכום את כולם. להכריז שארע שינוי כשביטוי זה עובר סף שנקבע מראש.

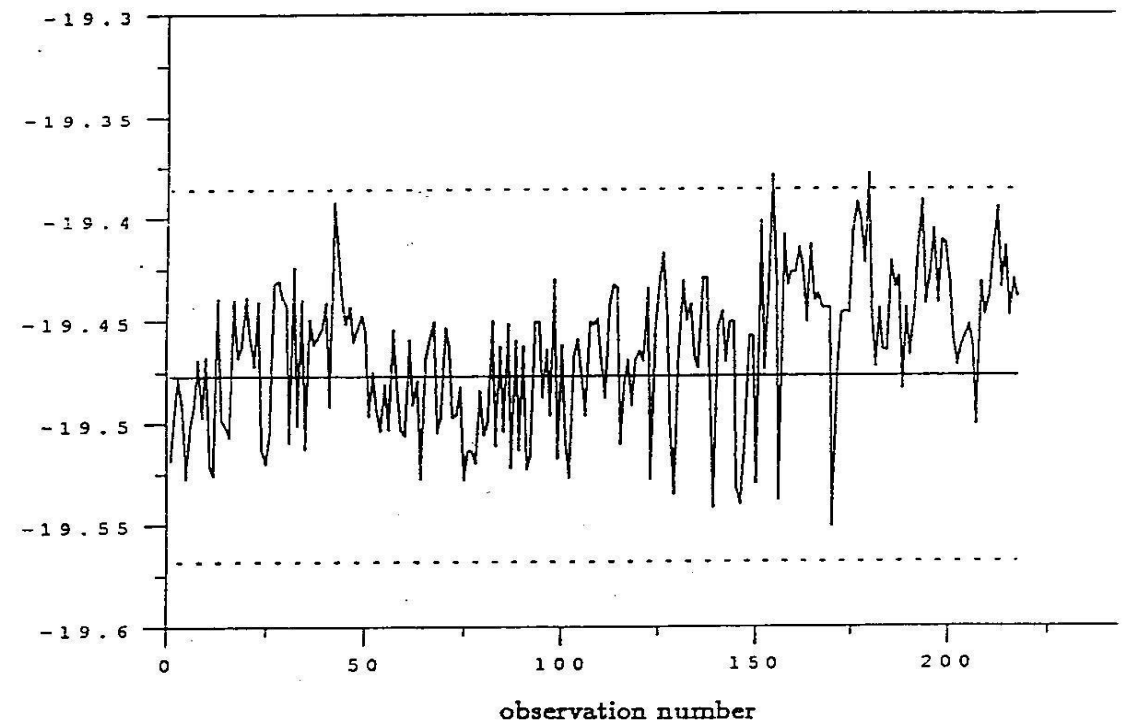
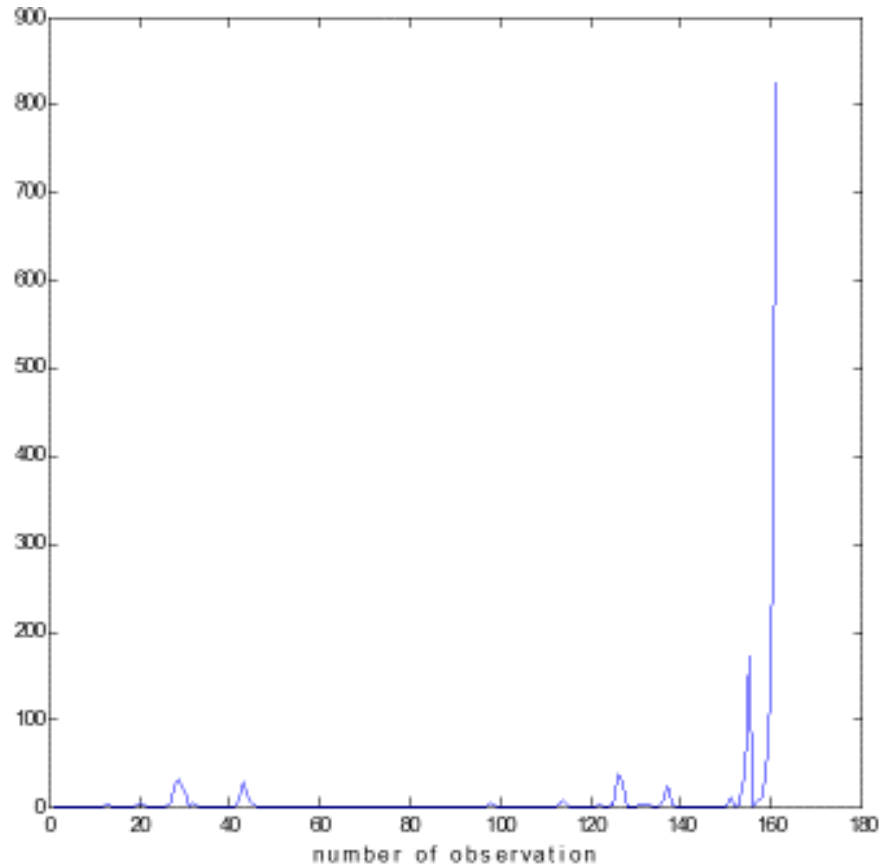
• תרשים בקרה:



Shiryaev-Roberts תרשים הבקרה של

• זו שיטה הקוראת לעצור ולהזעיק ב-

$$T_A = \min\{n \mid \sum_{k=1}^n \Lambda_k^n \geq A\}$$



צריך לקשר בין הסף A לבין המדד לאזעקת שווא

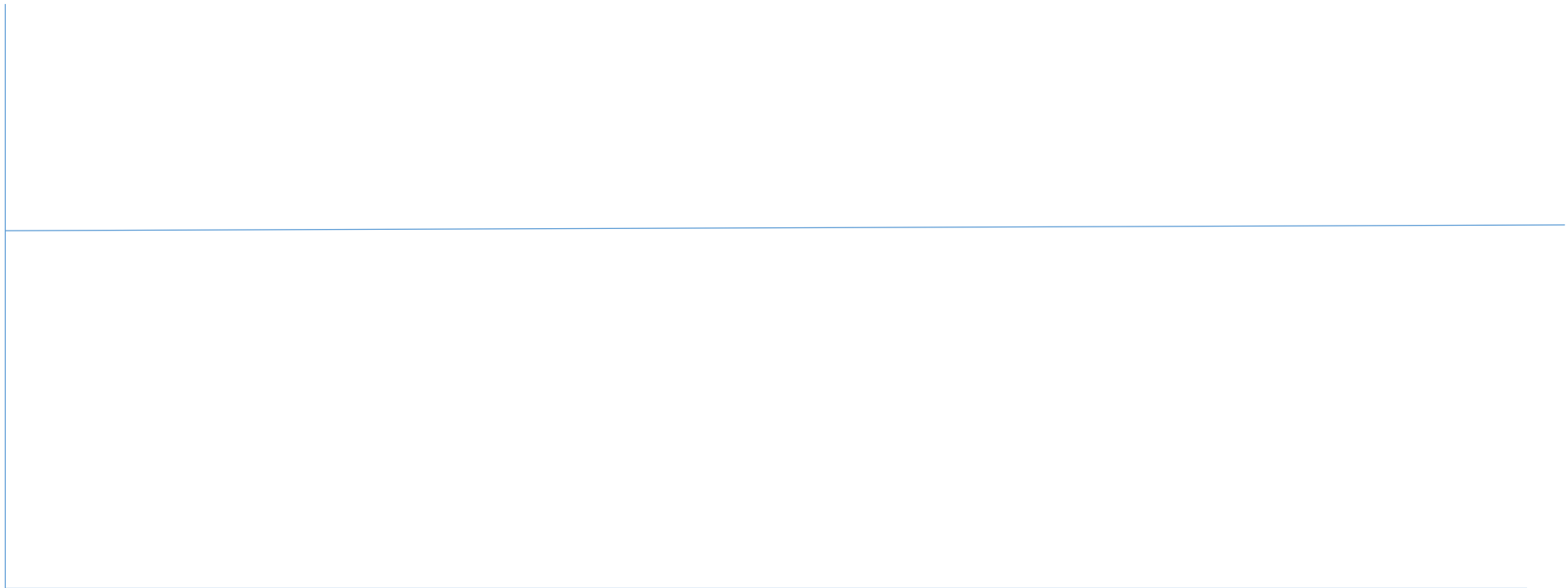
• עובדה: בשיטת Shiryaev-Roberts

$$E_{\nu=\infty} T_A \geq A \quad \approx \quad \text{const} \times A$$

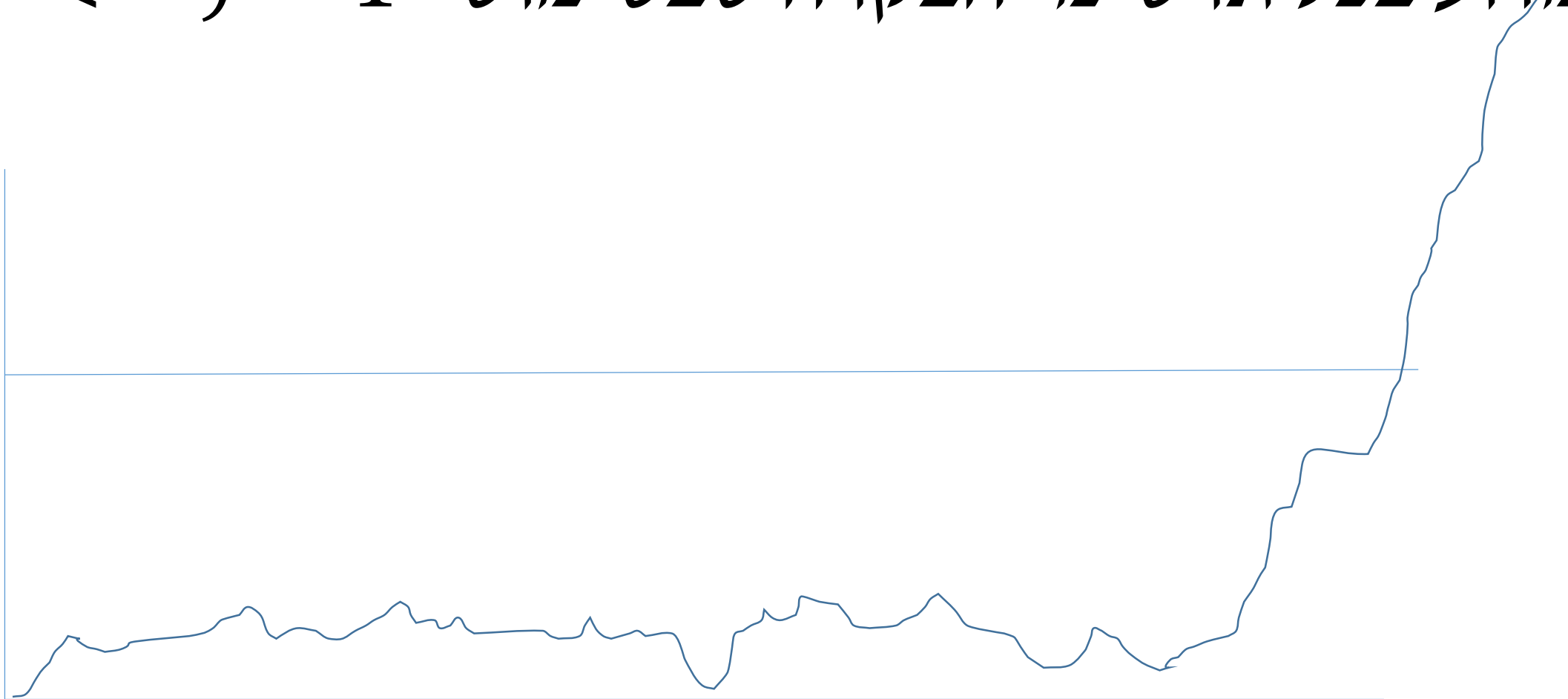
• לכן, אם רוצים ש- $E_{\nu=\infty} T_A \geq B$, אפשר להבטיח זאת על ידי בחירה $A = B$

• זה מתקיים אפילו כשיש תלות בין התצפיות

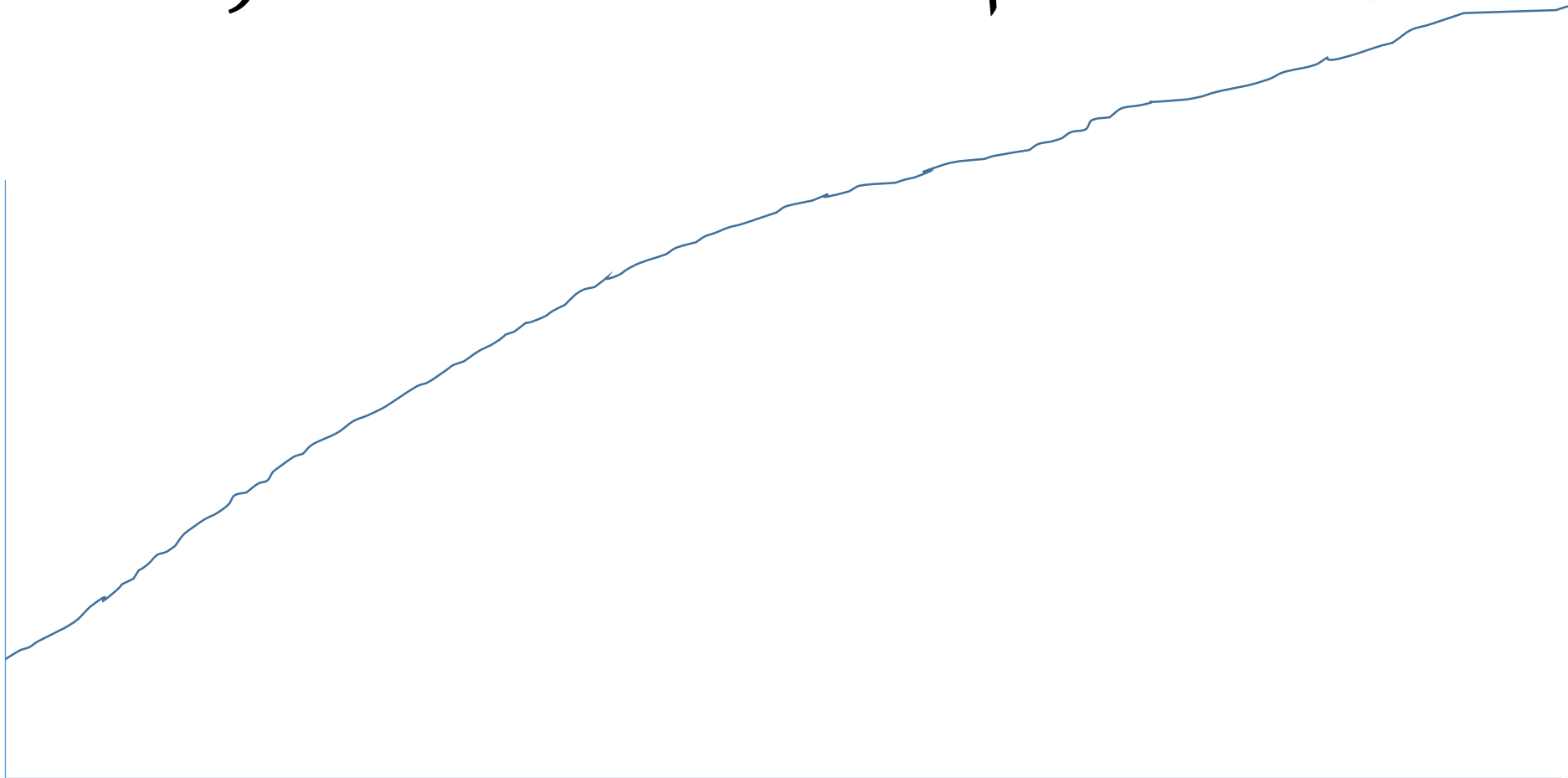
מדוע בכל תרשימי הבקרה שבשימוש $P_\infty(T < \infty) = 1$?



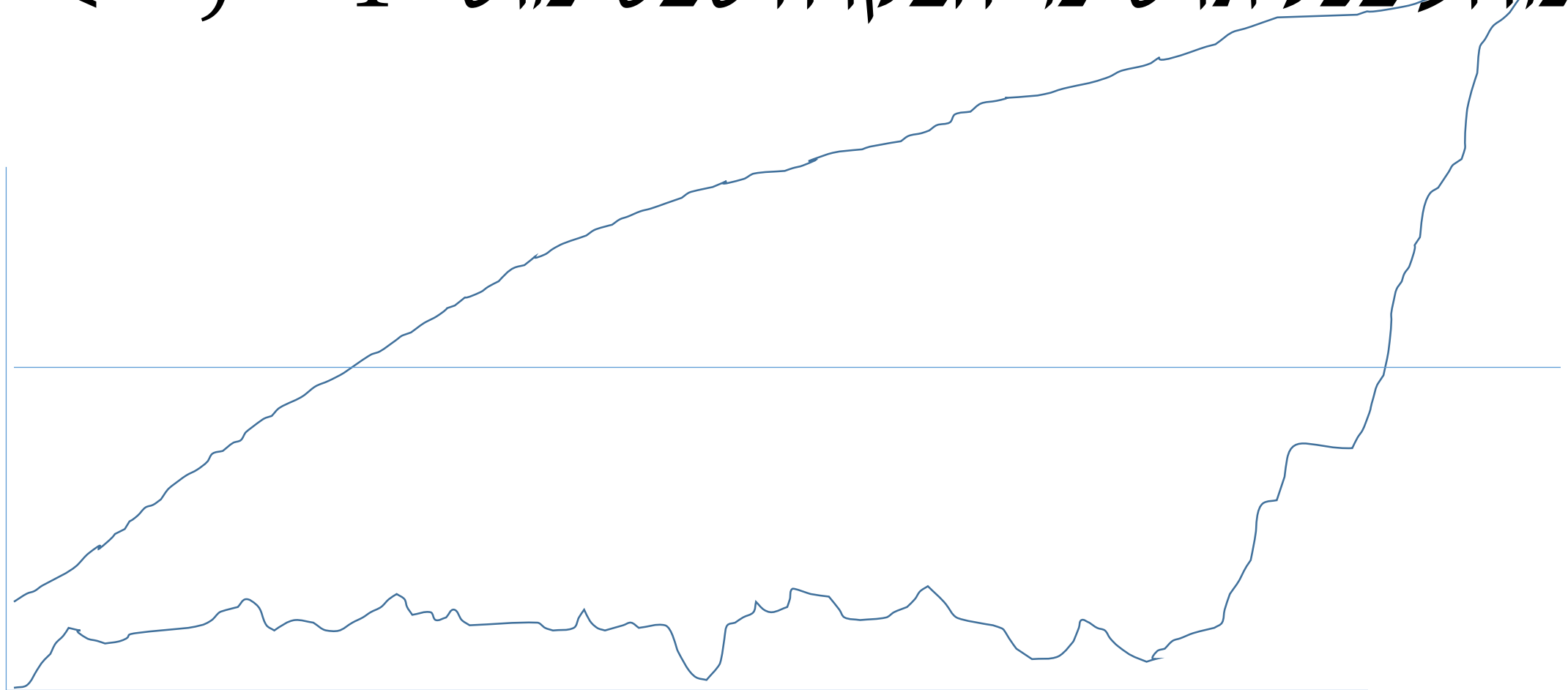
מדוע בכל תרשימי הבקרה שבשימוש $P_\infty(T < \infty) = 1$?



מדוע בכל תרשימי הבקרה שבשימוש $P_\infty(T < \infty) = 1$?



מדוע בכל תרשימי הבקרה שבשימוש $P_\infty(T < \infty) = 1$?



בדרך כלל ערך המודל שלאחר שינוי אינו ידוע מראש

- פתרון:
- להציב מספר מודלים פוטנציאליים למציאות שלאחר שינוי
- לחשב בנפרד את יחסי הנראות Λ_k^n לכל מודל
- לחשב את הממוצע של יחסי הנראות
- להציב את הממוצע במקום הביטוי הבודד, ולעצור כשהסכום של הביטויים עובר סף

למשל

$$P_{0 \text{ מודל}}(\text{חולה}) = .001$$

$$P_{0 \text{ מודל}}(\text{בריא}) = .999$$

$$P_{1 \text{ מודל}}(\text{חולה}) = .002$$

$$P_{1 \text{ מודל}}(\text{בריא}) = .998$$

$$P_{2 \text{ מודל}}(\text{חולה}) = .003$$

$$P_{2 \text{ מודל}}(\text{בריא}) = .997$$

$$\Lambda_{v=2}^{n=5} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_{v=2, 2 \text{ מודל}}(\text{חולה, בריא, בריא, בריא, חולה})}{P_{v=\infty, 0 \text{ מודל}}(\text{חולה, בריא, בריא, בריא, חולה})} + \frac{P_{v=2, 3 \text{ מודל}}(\text{חולה, בריא, בריא, בריא, חולה})}{P_{v=\infty, 0 \text{ מודל}}(\text{חולה, בריא, בריא, בריא, חולה})} \right)$$

ואפשר יותר.

הערה:

חשוב מאד (בינתיים) שמודל 0 ידוע; כלומר התנהגות התצפיות לפני שינוי תהיה ידועה.

בעיות

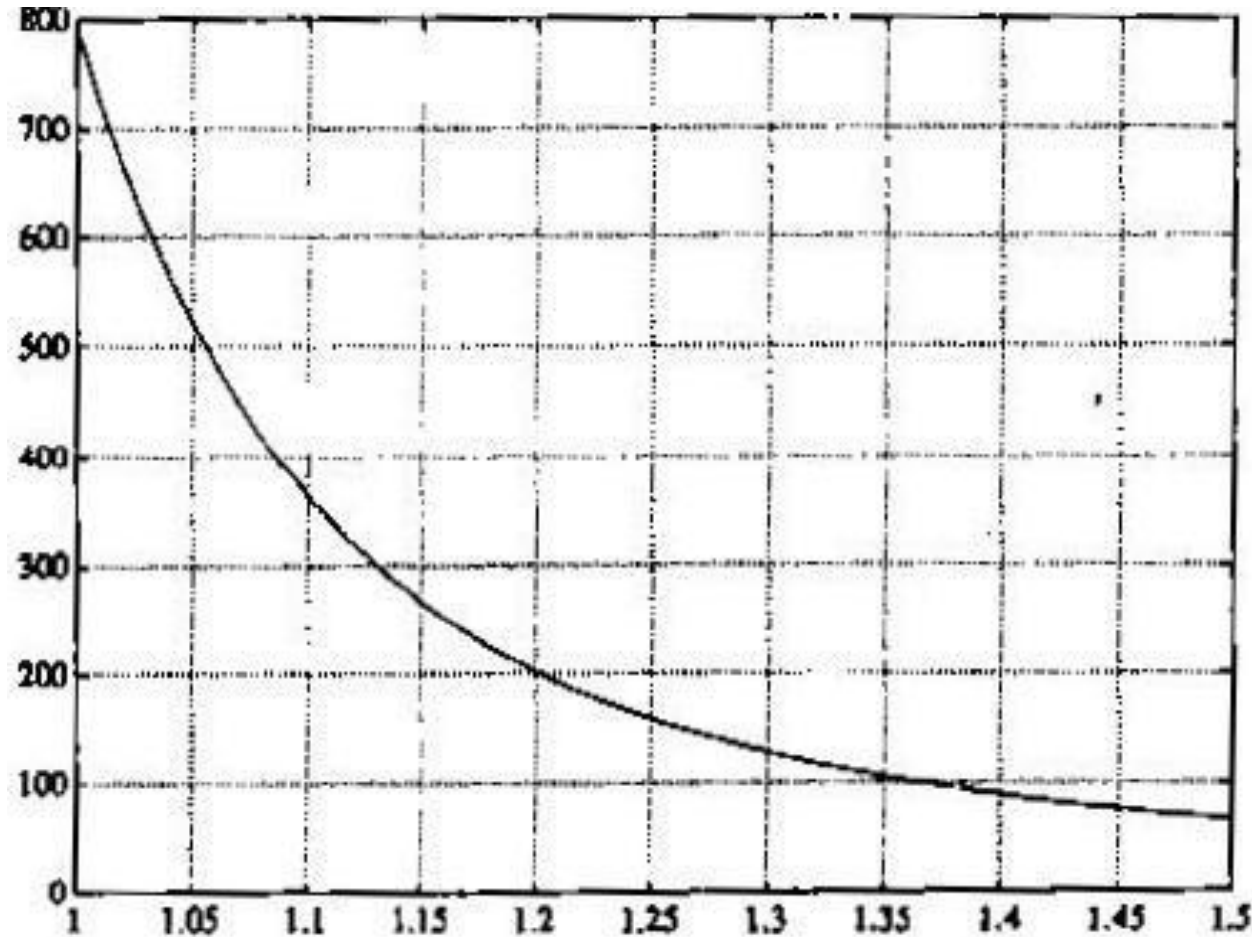
- מה אפשר לעשות כשהרמה ההתחלתית אינה ידועה? כשסטיית התקן ההתחלתית אינה ידועה?

$$\Lambda_k^n = \frac{f_{v=k}(X_1, X_2, \dots, X_n)}{f_{v=\infty}(X_1, X_2, \dots, X_n)}$$

- מה אם ההתפלגות של התצפיות אינה נורמלית?

- מה לעשות אם התהליך חדש לגמרי, ואפילו משפחת ההתפלגויות של התצפיות אינה ידועה?

- dependence of ARL to false alarm on the standard deviation for detecting a shift of 1 unit in the mean:



$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

• אם התצפיות לפני שינוי מפולגות $N(\mu, \sigma^2)$ באשר μ, σ^2 לא ידועות

• ולמשל מעוניינים בניטור נגד ירידה בתוחלת

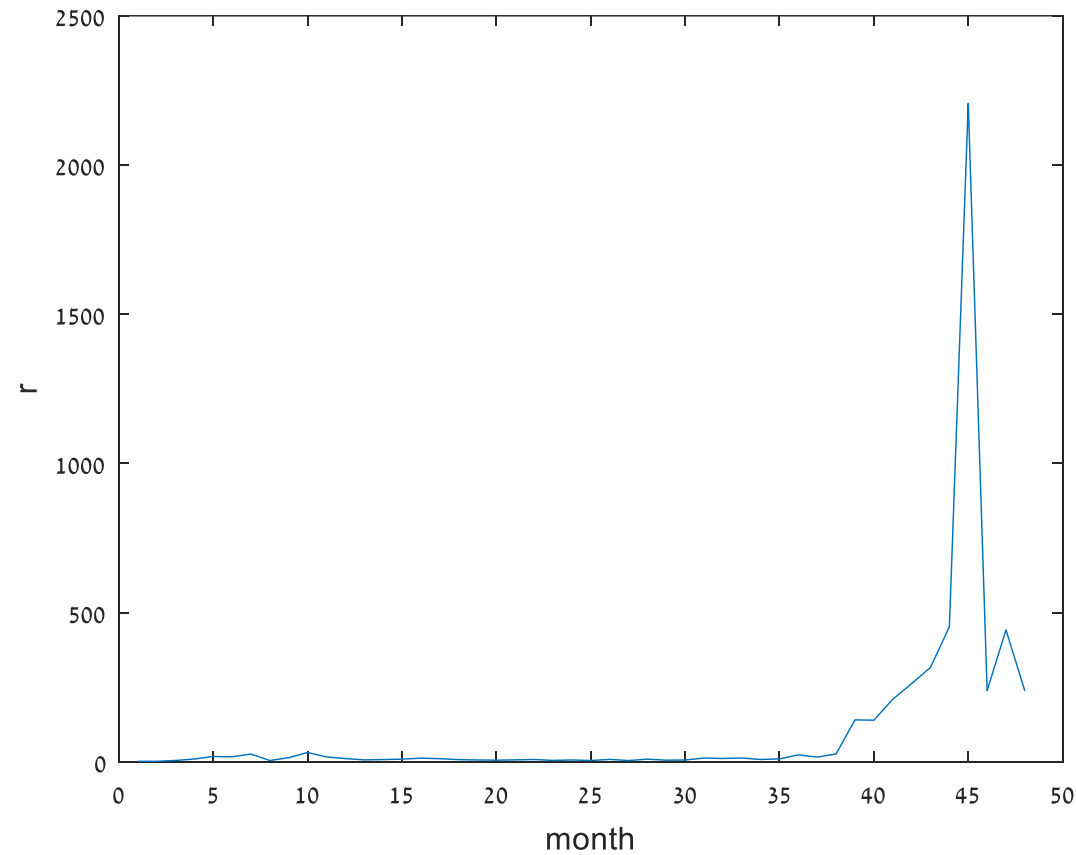
• אם נגדיר $Y_i = X_i - X_1$ ההתפלגות של Y_1, Y_2, \dots אינה תלויה בערך של μ

• ואם נגדיר $Z_i = \frac{Y_i}{|Y_2|}$ ההתפלגות של Z_2, Z_3, \dots אינה תלויה בערך של μ, σ^2

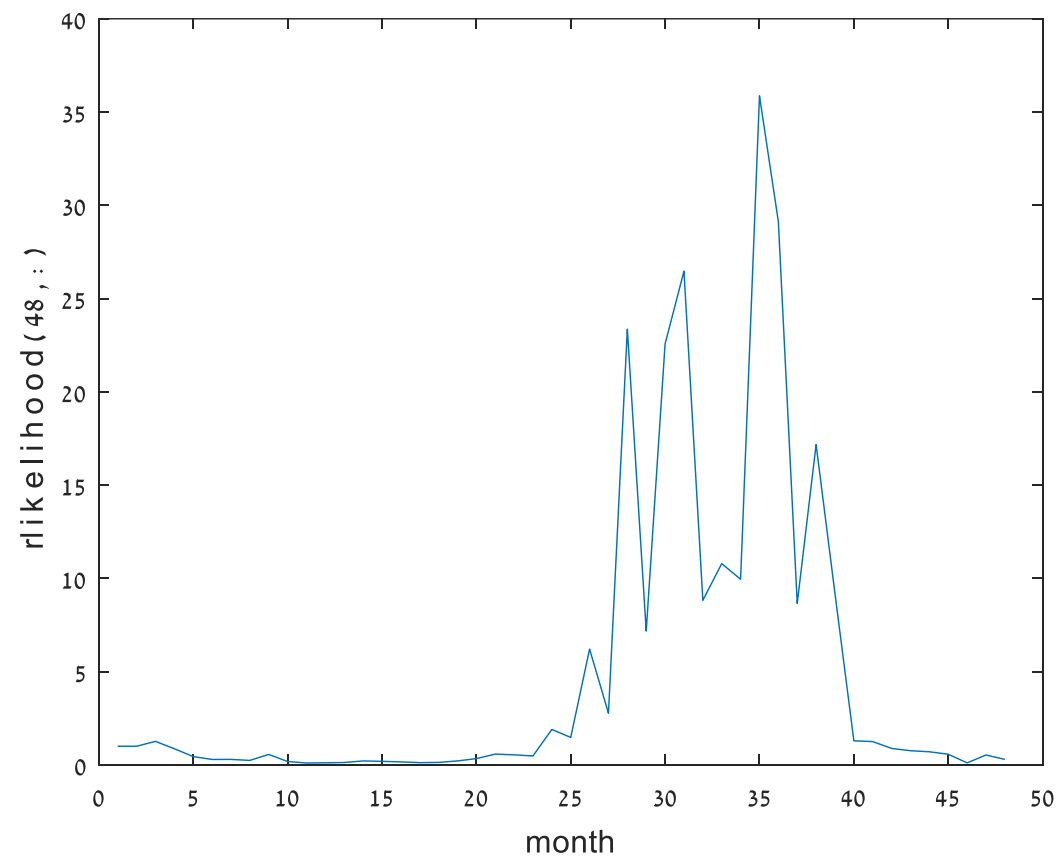
• לכן: נוכל נבסס את הניטור על הסדרה Z_2, Z_3, \dots , שכן התפלגותה לפני שינוי ידועה – אינה תלויה בפרמטרים שאינם ידועים.

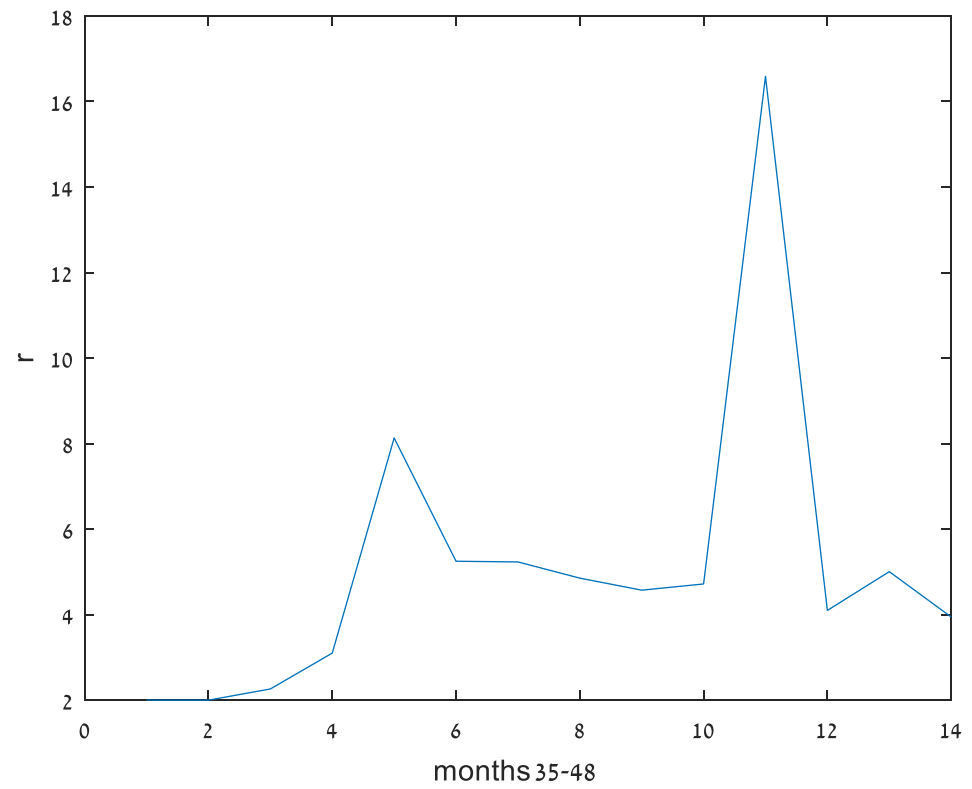
• נחשב יחסי נראות $\Lambda_k^n = \frac{f_{\mathcal{V}=k}(Z_2, \dots, Z_n)}{f_{\mathcal{V}=\infty}(Z_2, \dots, Z_n)}$ ונפעיל את Shiryaev-Roberts

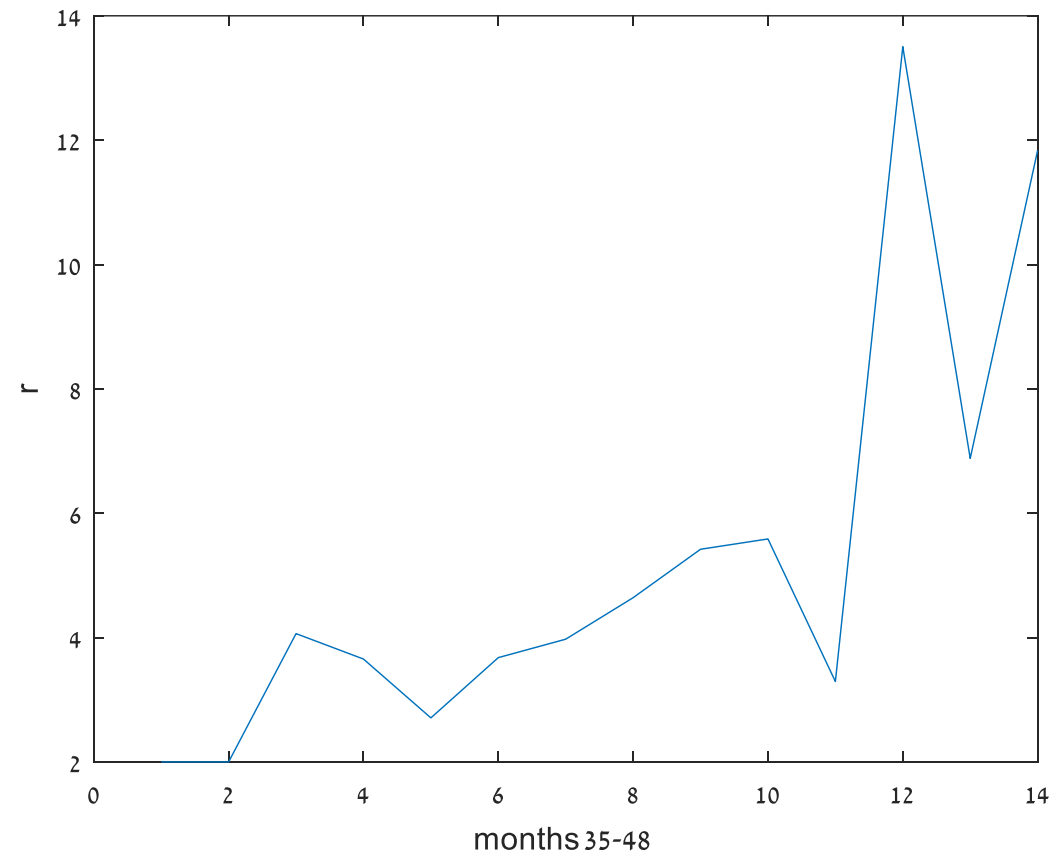
Shiryaev-Roberts – התחלות בניה



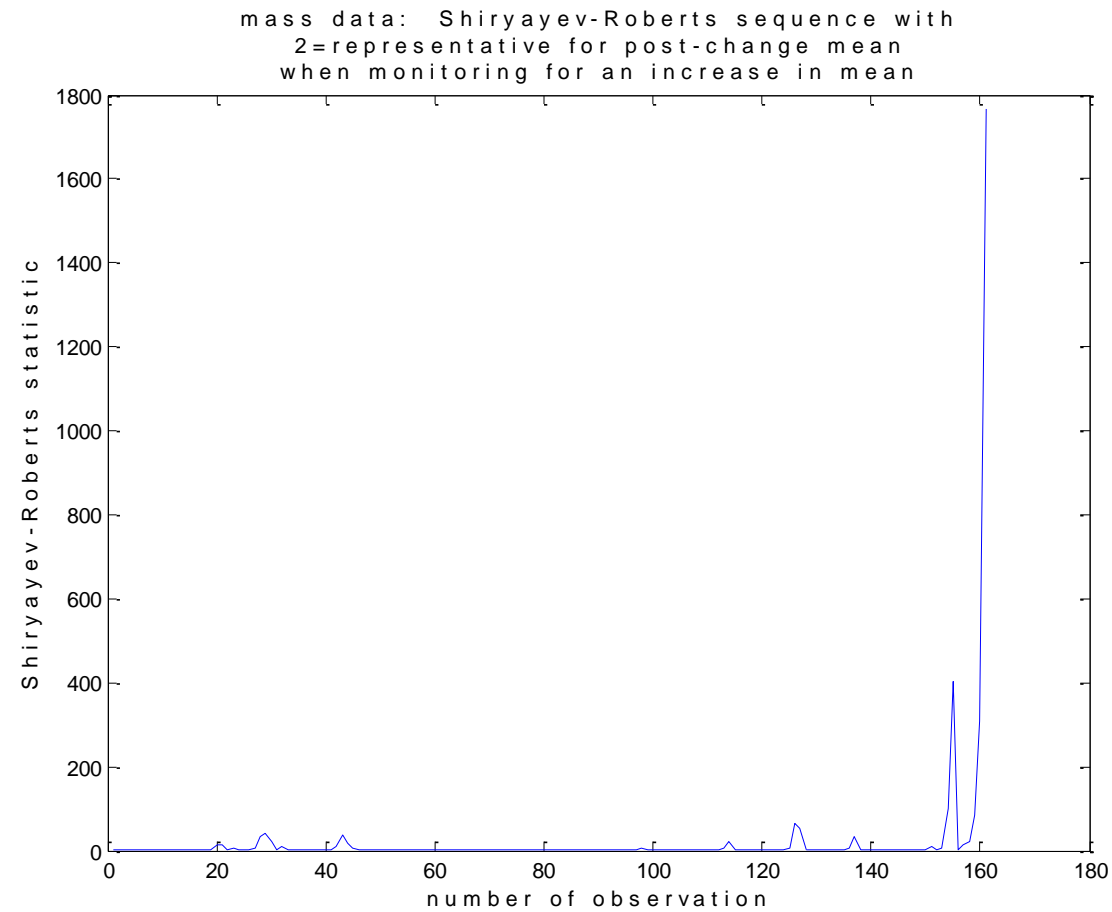
יחס הנראות אחרי 48 תצפיות







mass data example



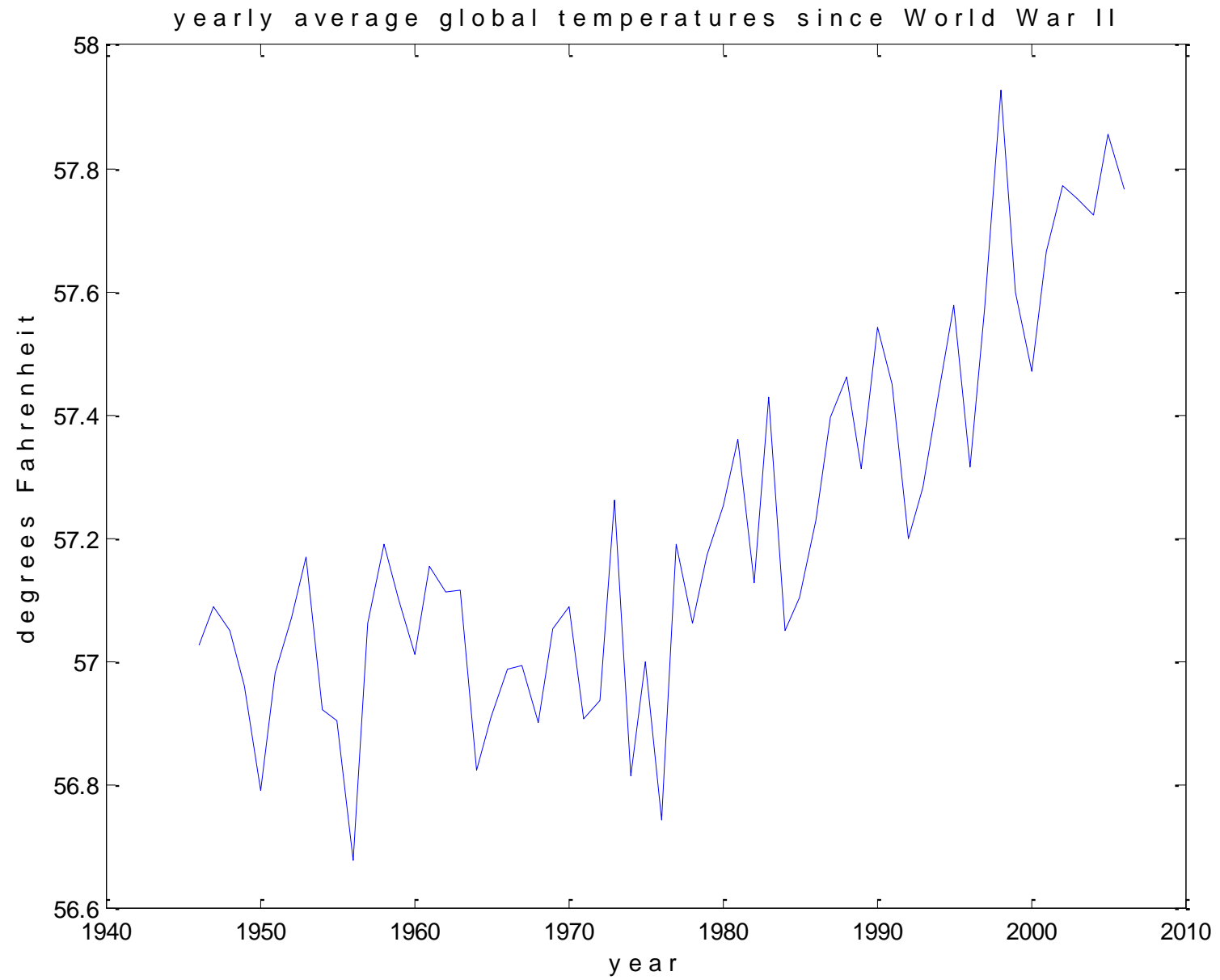
למשל: משפחת ההתפלגויות אינה ידועה

- מצב כזה דורש ניטור אי-פרמטרי
- נגדיר את הדרגה הסדרתית של תצפית X_i כמספר התצפיות עד כה שערכן אינו עולה על X_i , ונבסס את הניטור על סדרת הדרגות
- באופן פורמאלי:
הדרגה של X_i היא
$$r_i = \sum_{m=1, \dots, i} \#(X_m \leq X_i)$$
- לפני שינוי, ההתפלגות של r_1, r_2, \dots, r_n ידועה, שכן לכל סדר של i התצפיות הראשונות אותה הסתברות - $1/i!$

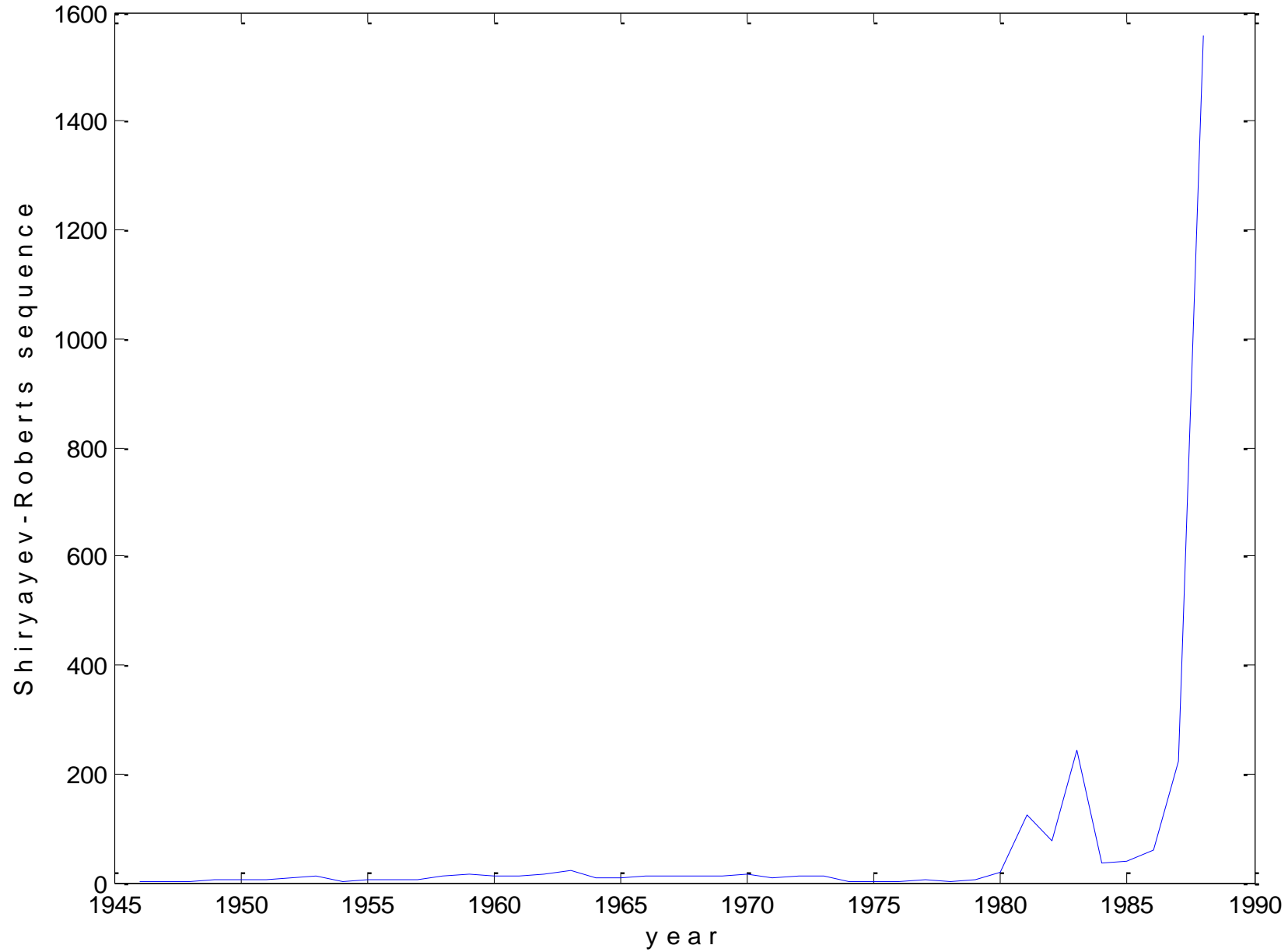
• לכן: כל מה שנותר הוא להגדיר יחסי נראות

$$\Lambda_k^n = \frac{f_{\nu=k}(r_1, r_2, \dots, r_n)}{f_{\nu=\infty}(r_1, r_2, \dots, r_n)}$$

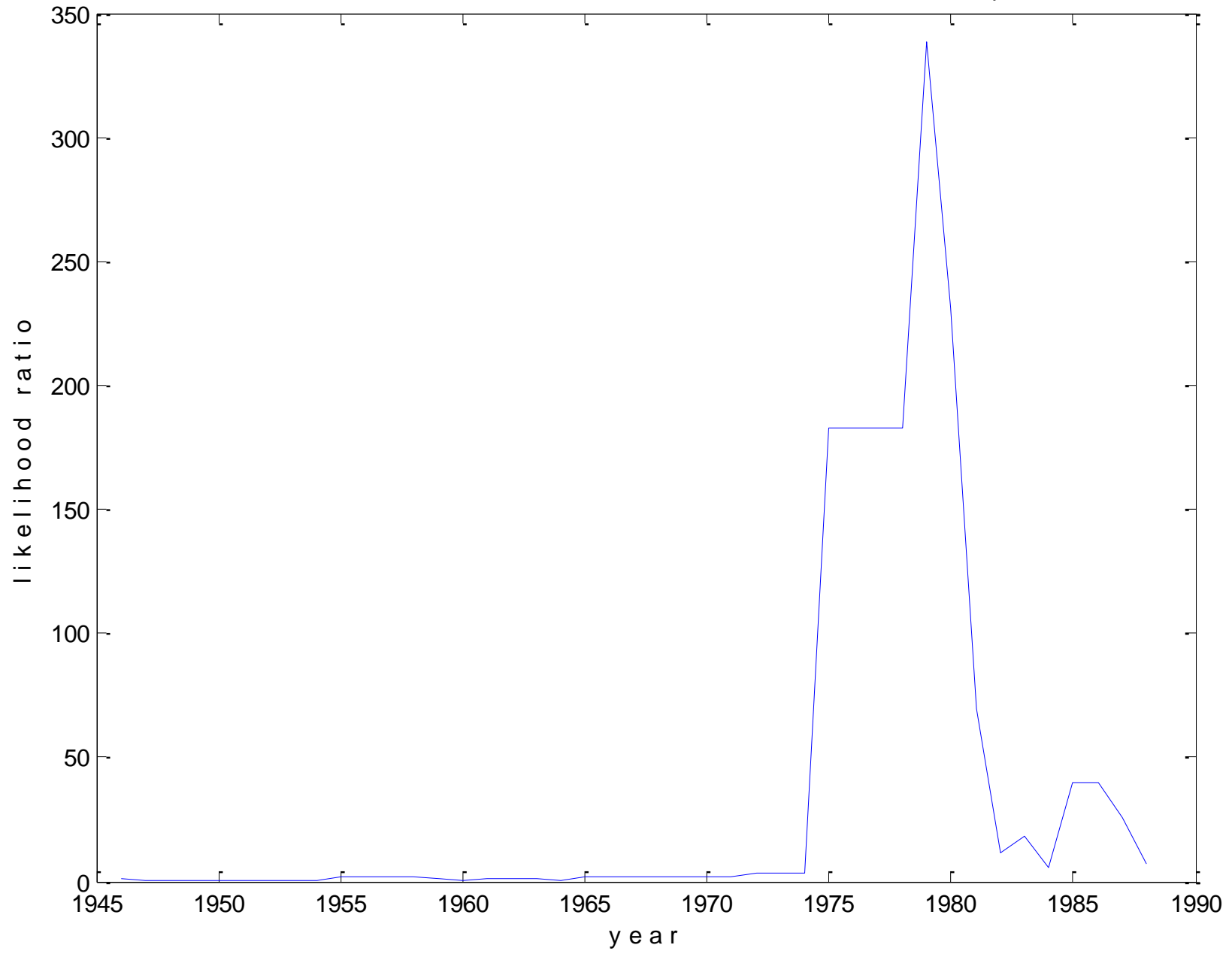
• ולהפעיל, בדומה לנ"ל, את שיטת Shiryaev-Roberts



Shiryayev-Roberts sequence
for post-WWII global warming data



post-WWII global warming data:
1988 likelihood ratios for increase of slope



תודה!



ולסיום ...

For the times they are a-changin'

Bob Dylan 1964

Come senators, congressmen
Please heed the call

Don't stand in the doorway

Don't block up the hall

For he that gets hurt

Will be he who has
stalled

There's a battle outside

And it is ragin'.

It'll soon shake your windows

And rattle your walls

For the times

they are a-changin'.

